MATEMATISKA FORMLER

Vi har tidigare varit inne på att när vi arbetar med formler så kan en och samma formel skrivas om på flera olika sätt. Ju duktigare man är i matematik desto fler olika sätt att säga samma sak klarar man av. I det här avsnittet ska vi med ”torrsim” öva på att hantera uttryck av olika slag. Formlerna här är alltså inga riktiga skogs-formler, utan precis samma matematik du träffat på flera gånger förut i skolan.

UTTRYCK

Det som står på högersidan i en funktion brukar ibland kallas för *uttryck*. Vi har tidigare haft exemplet med höjdkurvan där:

$$y = 9 + 0{,}4\,x$$

Här är alltså ”$9 + 0{,}4\,x$” ett uttryck. Vi har också varit inne på att detta uttryck, utan att förändra sitt värde, kan skrivas:

$$y = 0{,}4\,x + 9$$

Men det finns betydligt fler sätt att skriva uttrycket. T.ex.:

$$y = 0{,}4\,(22{,}5 + x)$$

Om diametern är 10 cm får vi ju med den sista formeln:

$y = 0{,}4\,(22{,}5 + 10)$ Parentesen ska tas först:

$$y = 0{,}4 \cdot 32{,}5$$

$$y = 13$$

I det här fallet var nog den ursprungliga formeln lättast att räkna med. Det betyder att vi måste kunna skriva om formeln vi hade sist på det sättet som vi hade först. Det kan vi också. När vi gör det måste siffran framför parentesen multipliceras med var och en av termerna i parentesen.

$y = 0{,}4\ (22{,}5 + x)$

$y = 0{,}4 \cdot 22{,}5 + 0{,}4 \cdot x$ Vi kan räkna ut första termen:

$y = 9 + 0{,}4\ x$ Vilket vi hade tidigare.

Det är viktigt att ta med tecknet framför respektive term vid multiplikationen. Om det istället stått:

$y = -0{,}4(22{,}5 - x)$ så hade resultatet istället blivit:

$y = -0{,}4 \cdot (+22{,}5) - 0{,}4 \cdot (-x)$

$y = -\ 9 + 0{,}4\ x$

Observera att detta inte alls är samma funktion som vi hade nyss, eftersom vi har ett minustecken på 9:an. Anledningen till att denna blir negativ här är att vi multiplicerar två faktorer med *olika* tecken, och då blir resultatet *negativt*. I sista termen multiplicerar vi två negativa faktorer ”–0,4” och ”–x” och då tar minustecknen ut varandra och produkten blir positiv. *Samma* tecken på faktorerna ger alltså en *positivt* resultat.

Man gör på samma sätt när man ska multiplicera två parenteser med varandra. T.ex.:

$y = (10 + 5x)(10 - 5x)$

Vi får alltså (tänk på att ta med tecknet framför varje term):

”$+10 \cdot +10$” $= +\ 100$

” $+\ 10 \cdot -5x$” $= -10 \cdot 5 \cdot x = -50\ x$

”$+5x \cdot +10$” $= 5 \cdot 10 \cdot x = +50\ x$

”$+5x \cdot -5x$” $= +5 \cdot -5 \cdot x \cdot x = -25\ x^2$

Sammanfattar vi det hela får vi alltså

$y = +100 - 50x + 50x - 25\ x^2$

Här tar $-50\ x$ och $+50\ x$ ut varandra så vi får formeln:

$y = 100 - 25x^2$ Vilket vi sedan tidigare vet också kan skrivas:

$y = -25x^2 + 100$

EXEMPEL 1

Förenkla uttrycket $x + 2 - (12 - 3x)$.

* * *

Egentligen betyder detta:

$x + 2 \mathbf{-1} \cdot (12 - 3x)$

Vi kan alltså multiplicera in ”-1” och samtidigt ta bort parentesen, ”$-1 \cdot +12 = \mathbf{-12}$” och ”$-1 \cdot -3x = \mathbf{+ 3x}$”:

$x + 2 - 12 + 3x$

Vi har fyra termer. Lägg ihop x-termerna för sig och konstanaterna för sig. Vi får då:

$4x - 10$

❑

EXEMPEL 2

Förenkla: $2 - (x + 2) + (x - 4)(x + 2) - 2(1 - x)$

* * *

Här finns fyra termer ”2”, ”$-(x + 2)$”, ”$(x - 4)(x + 2)$” och ”$-2(1 - x)$”. Ta och förenkla varje term för sig; 2 är klar, $-(x + 2)$ blir $-x - 2$ osv.

$2 - x - 2 + (x^2 + 2x - 4x - 8) - 2 + 2x$

$2 - x - 2 + x^2 + 2x - 4x - 8 - 2 + 2x$

Lägg ihop siffrorna för sig, x-termerna för sig och x^2 för sig:

$-10 - x + x^2$

Eller:

$x^2 - x - 10$

❑

EXEMPEL 3

Förenkla: $(x-2)^2-(x-2)(3-x)$

* * *

$(x-2)^2$ innebär att parentesen ska multipliceras med sig själv, dvs. $(x-2)(x-2)$. Vi får då:

$$(x-2)(x-2)-(x-2)(3-x)$$

$$(x^2-2x-2x+4)-(3x-x^2-6+2x)$$

Minustecknet före andra parentesen gör att vi måste byta tecken på alla termer i parentesen (samma som att multiplicera varje term med ”-1”:

$$x^2-2x-2x+4-3x+x^2+6-2x$$

$$2x^2-9x+10$$

❑

Kom ihåg att poängen med att förenkla ett uttryck är att det ska vara lika mycket värt före och efter förenklingen. Stoppar vi t.ex. in $x = 10$ i formeln före och efter förenkling ska vi få samma tal. Om vi testar på uttrycket i exempel 3 får vi:

$$(x-2)^2-(x-2)(3-x) = (10-2)^2-(10-2)(3-10) = 8^2-(8\cdot -7)=$$

$$64-(-56) = 64+56 = 120$$

Medan vi i det förenklade uttrycket får:

$$2x^2-9x+10 = 2\cdot 10^2-9\cdot 10+10 = 2\cdot 100-90+10 =$$
$$200-90+10 = 120.$$

Helt riktigt fick vi samma värde före och efter förenklingen.

Övningar

☞ Förenkla följande uttryck genom att ta bort parenteserna

201 **a)** $3x - 8x$ **b)** $3x - 2y - 8x + 5y$

c) $x - (x - y)$ **d)** $8 - 3x + (x - 8) - (-2x)$

202 **a)** $(x + 3) - (3 + x)$ **b)** $2x - (2x + 3) - 4x$

c) $5x - (3x + 2y) - (x - 4y) - 5x$ **d)** $9x - (5x + 3y) - (2y - x) - (-3)$

203 **a)** $(x - x^2) - (x^2 - x)$ **b)** $5xy - (7xy + 3y) - (3x - 3y) - (x - xy)$

c) $-xy + yx + xy + yx - 5(x - xy)$ **d)** $(x - 1) - (x - 1) - (x - 1) - 1$

204 **a)** $3x - (-4x + 3xy) - (x - 2y) - x$ **b)** $(x + x^2) + x^3 - (x - x^2) - x^2$

c) $(x + x^2 + x^3) + (x + x^2 + x^3)$ **d)** $x^3 - (x^3 + xy) - 2xy - (x - xy)$

205 **a)** $5(3 + x)$ **b)** $x(7 + x)$

c) $5x(3 + x)$ **d)** $5x(3 - x)$

206 **a)** $13x - 5x(3 - 2x)$ **b)** $3(x + 2) - x(x - 3)$

c) $x^2 - x(1 - x) - (1 - x)$ **d)** $x(x + 2) - x(x - 2)$

207 **a)** $t(2 + t) - 3(t - 2)$ **b)** $t(3t - 6) - 2t(-t)$

c) $(t + 2)^2$ **d)** $-4(t - 1)(t - 2)$

208 **a)** $(t + 3)^2 - (t - 3)^2$ **b)** $(t + 2)\,(t - 3)$

c) $(t + 2)(t - 2) + 4$ **d)** $-4(1 - t)(t - 2)$

209 **a)** $(x + 1)(x - 3) + (x - 2)^2$ **b)** $(x - 1)(x + 3) - x(x - 2)$

c) $(x - 1) - (x - 2) - (x - 3)$ **d)** $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

210 **a)** $4(x-2)-5(3+x)$ **b)** $-5(x+3-y)-x(y-5)$

c) $x(xy)(x-y)$ **d)** $(7-x)^2+(5-x)(3-2x)-27$

211 **a)** $(x-6)^2+(6x+1)^2-37$ **b)** $(3x-4)^2-(3x+1)(3x-1)-12$

c) $3-(4x-5)^2+4x(2-4x)$ **d)** $2x^2-3x(y+x)+(x-1)^2$

ENHETSBYTEN

Matematiken uppstod ur diverse mätningar. Man mätte sträckor, areor och volymer. De enheter som användes för mätningarna varierade dock från plats till plats. Det fanns exempel på sådana oprecisa längdmått som ”ett kobröl” (det avstånd på vilket man kunde höra en ko) och det kanske ännu mer udda ”en tekopp” (sträckan man hinner gå med en kopp kokhett te innan det kommit ner till en drickbar temperatur) – de engelsmännen, de engelsmännen…

Numera är enheterna något sånär standardiserade i det så kallade SI-systemet. SI betyder Systéme Inetrnational d’Unités, alltså en internationell standard för måttenheter. Trots standardiseringen är det fortfarande väldigt lätt att göra fel vid enhetsbyten, framförallt vid byte av enheter för areor och volymer. Särskilt svårt är det dock egentligen inte, om man bara tar det lugnt och metodiskt. Tack vare standardiseringen handlar det mest om att flytta decimalkommat åt rätt håll.

EXEMPEL 4

a) Förvandla 0,015 meter till mm:

Det går 1 000 mm på en meter (3 nollor). Flytta därför decimalkommat tre steg åt HÖGER.

Svar: 0,015 m = 0015,0 mm = 15 mm

b) Förvandla 23 000 mm^2 till dm^2:

Det går 100 mm på en dm. Då går det 100 · 100 = 10 000 mm^2 på en dm^2 (4 nollor). Flytta därför decimalkommat fyra steg åt VÄNSTER

Svar: 23 000,0 mm^2 = 2,30000 dm^2 = 2,3 dm^2

c) Förvandla 0,06 dm^3 till cm^3:

Det går 10 cm på en dm. Då går det $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$ cm^3 på en dm^3 (3 nollor). Flytta därför decimalkommat tre steg åt HÖGER.

Svar: 0,060 dm^3 = 0060,00 cm^3 = 60 cm^3

❑

ÖVNINGAR

☞ Förvandla:

212 **a)** 1 887 550 cm^2 till m^2 **b)** 0,000150 m^3 till cm^3

c) 750 mm^3 till dm^3 **d)** 168 mm^2 till dm^2

213 **a)** 1 550 cm^2 till m^2 **b)** 1 287 000 mm till mil

c) 515 dm^3 till m^3 **d)** 0,015 m^2 till cm^2

214 **a)** 350 dm^3 till m^3 **b)** 1 ha till cm^2 (**1 ha = kvadrat 100 m · 100 m**)

c) 453 ha till km^2 **d)** 105 cm^3 till liter

215 **a)** 800 cm^2 till dm^2 **b)** 78 dl till m^3 **(10 dl = 1 liter = 1 dm^3)**

c) 75 liter till cm^3 **d)** 15,5 dm till mm

216 **a)** 10 h till sekunder **b)** 0,25 h till minuter

c) 30 minuter till h **d)** 7 200 sekunder till h

Omkrets och areaberäkning

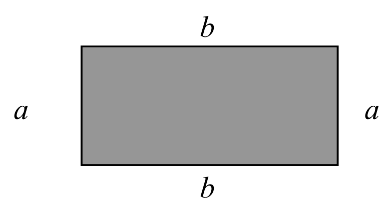
I detta och det följande avsnittet ska vi repetera de vanligaste formlerna för att beräkna areor och volymer som finns i matematiken. Utifrån dessa formler ska vi sedan skapa modeller för att bl.a. beräkna trädens volym. I vanliga matematikkurser brukar detta avsnitt kallas för geometri. Ordet geometri stammar från grekiskan och betyder fritt översatt ”jordmätning”. Jordmätning är något vi i lantbruket fortfarande håller på en hel del med, t.ex. när vi beräknar beståndens areal. Idag används dock ofta flyg- och satellitbilder och sofistikerade dataprogram för att hantera kartor (s.k. geografiska informationssystem, GIS).

Målet är att du ska lära dig de vanligaste formlerna utantill och att du ska ha tydliga inre mentala bilder av vad t.ex. 1 mm^2, 1 ha, 1 dm^3, 1 m^3, står för.

Hur omkrets och area beräknas för nedanstående figurer bör du kunna utantill.

Rektangel och kvadrat

Rektangeln har fyra sidor som parvis är parallella. I varje hörn av rektangeln har vi en rät vinkel (90 °). *Omkretsen* får vi genom att summera längden av alla fyra sidorna. Om vi uttrycker detta med formler får vi för rektangeln i figuren nedan:

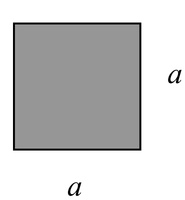


Rektangelns omkrets = $a + b + a + b = 2a + 2b = 2(a + b)$

För att beräkna *arean* multiplicerar vi de två sidorna med varandra.

Rektangelns area = $a \cdot b$

Ett specialfall av rektangeln är kvadraten. För kvadraten är alla fyra sidorna lika långa.

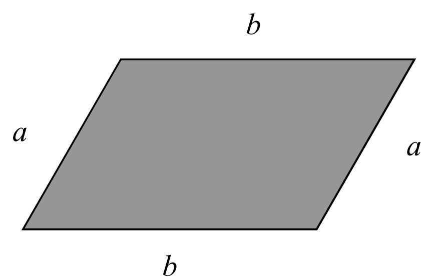


Kvadratens omkrets = $a + a + a + a = 4a$

Kvadratens area = $a \cdot a = a^2$.

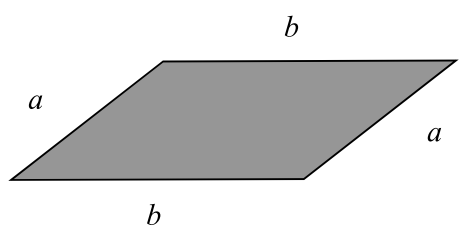
Parallellogram

Ett parallellogram har precis som rektangeln fyra sidor som parvis är parallella. Här är dock inte vinklarna i hörnen 90°.

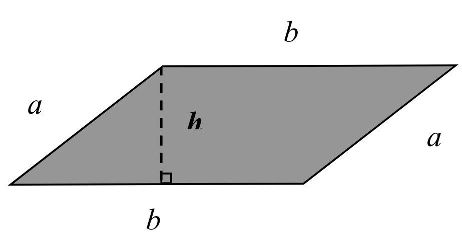


Omkretsen blir precis som för rektangeln: $2(a + b)$.

För arean blir det annorlunda. Två parallellogram som har precis samma längd på sidorna kan ha två helt olika areor, eftersom areans storlek beror av hörnens vinklar. Jämför t.ex. parallellogrammet nedan med det vi hade ovan. Trots att båda har samma längd på sidorna, kan man med blotta ögat se att de har olika areor.



För att ta reda på arean måste man dra *höjden*, h, i figuren. Höjden är detsamma som den kortaste vägen mellan de två sidorna b i figuren. Man säger att höjden ska dras i *rät vinkel mot basen*, som här är sidan b.



Genom att dela upp parallellogrammet i olika delar kan man visa att arean är exakt lika stor som för en rektangel med sidor b och h.

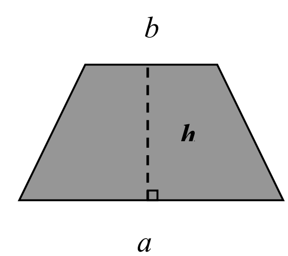
Tänk dig t.ex. att du klipper ut triangeln till vänster om den streckade linjen och sedan lägger till denna triangel längst till höger i figuren. Den kommer att passa precis! Du får en rektangel med bas b och höjd h.

Parallellogrammets area = $b \cdot h$

Detta innebär att om sidorna b kommer väldigt nära varandra så kommer arean nästan att bli noll. Detta oavsett hur långa sidorna a och b är.

PARALLELLTRAPETS

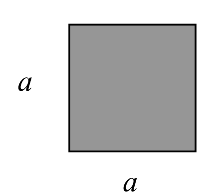
Om du ser en virkestrave från sidan kan den – något förenklat – se ut som en parallelltrapets. I en parallelltrapets är två av sidorna parallella. I bilden nedan är det a och b som är det. Precis som för parallellogrammet behöver man då känna det vinkelräta avståndet, h, mellan de parallella sidorna för att kunna räkna ut arean.



Parallelltrapetsens area = $h \cdot \dfrac{(a+b)}{2}$

Att formeln för arean blir som den blir kan förklaras av att man först beräknar medellängden på de två sidorna a och b (lägger ihop dem och delar med två) och därefter multiplicerar medellängden med figurens höjd, h.

Egentligen är kvadratens, rektangelns och parallellogrammets areor specialfall av parallelltrapetsen. Tänk dig t.ex. en kvadrat med sidan a. Då kommer vi ju, om vi ser denna som en parallelltrapets, att få (höjden, $h = a$ och även sidan $b = a$):

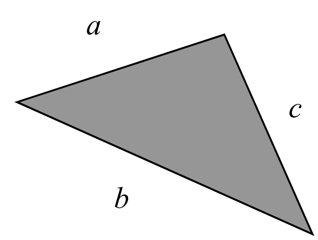


$$\text{arean} = h \cdot \frac{(a+b)}{2} = a \cdot \frac{(a+a)}{2} = a \cdot \frac{2a}{2} = a \cdot a = a^2$$

Samma formel som vi känner igen sedan tidigare!

TRIANGEL

Det finns många typer av trianglar. De vanligaste typerna är rätvinkliga, liksidiga och likbenta. Oavsett hur triangeln ser ut kommer omkretsen alltid att vara summan av de tre sidorna.

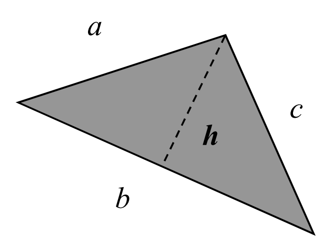


Triangelns omkrets = $a + b + c$

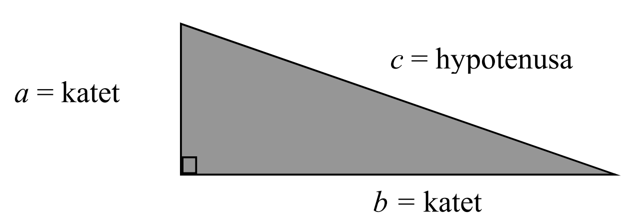
Arean kommer också alltid att kunna beräknas med följande formel:

Triangelns area = $b \cdot h / 2$

där h är höjden dragen vinkelrätt mot sidan b, triangelns bas.

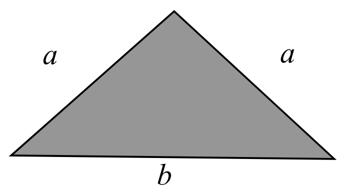


Figuren nedan visar en *rätvinklig* triangel. Här bildar två av sidorna, de så kallade *kateterna*, en rät vinkel mot varandra. Att vinkeln är rät (90°) brukar markeras med en liten fyrkant i hörnet där sidorna möts. I figuren nedan bildar alltså a och b en rät vinkel mot varandra och kallas för kateter medan sidan c kallas för *hypotenusa*.



För att få arean i en rätvinklig triangel multiplicerar vi alltså kateterna med varandra och dividerar med två. Den rätvinkliga triangelns area är ju precis hälften så stor som arean för en rektangel med sidorna a och b.

I en *likbent* triangel är två av sidorna lika långa.



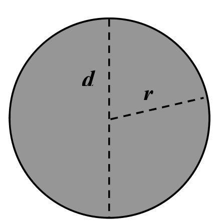
I en *liksidig* triangel är *alla* tre sidorna lika långa.

CIRKEL

De antika grekerna, som till stora delar uppfunnit geometrins matematik, hade stora problem med cirkeln. De var vana vid att räkna bråkräkning och trodde därför länge att det skulle gå att hitta ett bråktal som multiplicerat med diametern gav cirkelns omkrets. Lösningen på problemet – talet π – kan dock inte uttryckas som en division mellan två tal. Som nämnts tidigare är π ett irrationellt tal och dess decimalutveckling fortsätter i all oändlighet utan att upprepa sig.

$\pi \approx 3{,}14159265\ldots$

Avståndet genom mittpunkten som delar cirkeln i två lika stora delar kallas för cirkelns *diameter, d*. Tar man halva diametern får man cirkelns *radie, r*. Denna är alltså avståndet från medelpunkten ut till kanten på cirkeln.



För en cirkel med diameter d och radie r gäller:

Cirkelns omkrets = $\pi \cdot d$

Cirkelns area = $\pi \cdot r^2$

I skogen räknar vi ofta med den genomskärningsyta som en trädstam har i brösthöjd. Ofta utgår man då från att denna yta är formad som en cirkel. När vi med klave mäter trädets diameter kan det vara lättare att uttrycka formeln för arean som:

Cirkelns area = $\pi \cdot d^2 / 4$

Att det blir så kan vi lätt visa. Eftersom $r = d/2$ kan vi stoppa in d/2 istället för r i formeln:

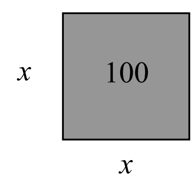
$$\text{Cirkelns area} = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} = \pi \frac{d^2}{4} \ .$$

EXEMPEL 5

Du ska lägga ut en kvadratiskt formad provyta i en skog som ska ha arean 100 m^2. Hur långa ska sidorna vara?

* * *

Eftersom vi inte vet sidornas längd kallar vi denna sträcka *x* meter. Eftersom alla sidorna är lika långa i en kvadrat blir alla sidorna *x* meter långa. För att få arean multiplicerar vi:



$x \cdot x = 100$

Ett tal gånger sig självt sägs vara talet i kvadrat (t.ex. $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$). Här har vi $x \cdot x = x^2$. Vi kan alltså skriva ekvationen:

$x^2 = 100$

x är då kvadratroten (√) ur 100:

x = √ (100)

$x = 10$

Kvadratroten ur hundra är ju 10 eftersom $10 \cdot 10$ är just hundra. Man kan säga att kvadratroten ur något är den inversa funktionen till att ta något i kvadrat.

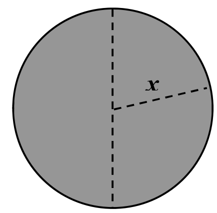
❑

EXEMPEL 6

Du ska lägga ut en cirkulärt formad provyta i en skog som ska ha arean 48 m^2. Hur lång ska radien vara? Om du räknar utan miniräknare kan du för enkelhetens skull använda att $\pi \approx 3$.

* * *

Här är det radien som är okänd och därför kallas för x. Enligt formeln för cirkelns area får vi då ekvationen:



$\pi \cdot x^2 = 48$

Om vi byter π mot 3 får vi:

$3 \cdot x^2 = 48$

För att få x^2 ensamt på vänster sida om likamedtecknet i ekvationen måste vi dividera med 3 på båda sidor. Gör vi det kan vi ju förkorta bort 3:orna:

$x^2 = 16$

$x = 4$

Detta svar kommer inte stämma exakt eftersom vi lite felaktigt utgick från att pi var detsamma som 3. I stort sett kommer det dock att stämma. Räknar man med miniräknare får man svaret 3,91 m.

❑

ÖVNINGAR

☞ *Beräkna utan miniräknare*

217 a) Arean av en rätvinklig triangel med kateterna 4 och 5 meter.

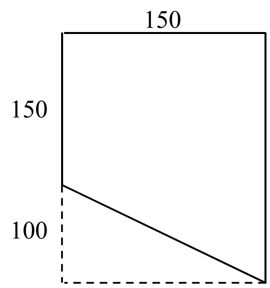
b) Arean av ett parallellogram med höjden 4 meter och basen 8 meter.

c) Arean av en cirkel med diameter 10 meter. Använd att $\pi \approx 3$.

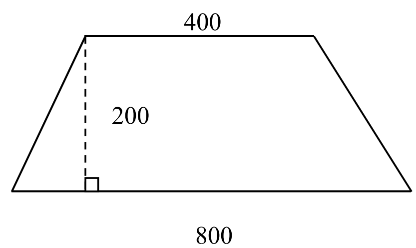
d) Omkretsen av en cirkel med diameter 6 meter. Använd att $\pi \approx 3$.

218. Bestäm arean av nedanstående områden. Svara i hektar avrundat till en decimal. Figurerna är *inte* skalenliga.

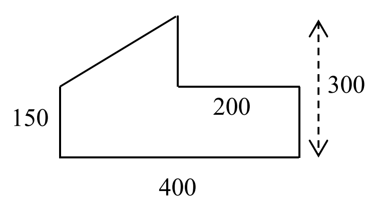
a) [Enhet: m]



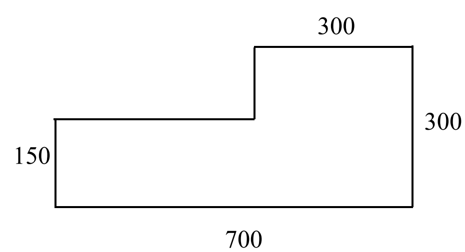
b) [Enhet: m]



c) [Enhet: m]



d) [Enhet: m]

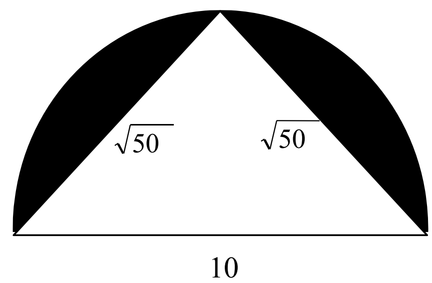


219. Man har klavat tre träd i brösthöjd med följande resultat. Beräkna arean för genomskärningsytan i brösthöjd (grundytan) för vart och ett av träden. Utgå från att ytan är cirkulär och att $\pi \approx 3$. Svara i enheten dm^2.

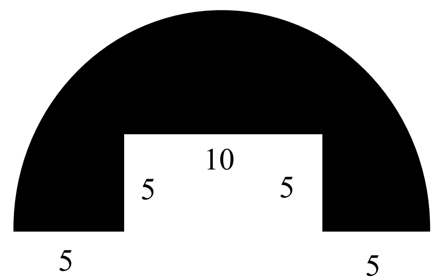
a) 10 cm **b)** 20 cm **c)** 40 cm

220. Beräkna area och omkrets för de *skuggade* områdena nedan. Använd $\pi \approx 3$ och $\sqrt{50} \approx 7$.

a)



b)



221. Uppskatta grundyta (genomskärningsyta i brösthöjd), dels *på* och dels *under* bark, för en tall med diameter 10 cm i brösthöjd och enkel barkt-jocklek 5 mm. Antag i beräkningen att ytan är cirkulär och att $\pi \approx 3$.

222. Vid en cirkelyteinventering lades fem provytor med radien 10 meter ut i ett bestånd som var 3 ha stort. Hur många procent av arealen inventerades? Använd att $\pi \approx 3$.

223. Ett rektangelformat område är inhängnat med staket. Staketets sammanlagda längd är 200 meter och de båda korta sidorna i rektangeln är 40 meter.

a) Vilken area har rektangeln?

b) Om det står 120 stammar på ytan, hur många stammar motsvarar då detta per hektar?

224. På en cirkelformad provyta med radie 10 meter står 6 träd, alla med brösthöjdsdiameter på 20 cm. Vilken grundyta i m^2/ha svarar detta mot? Räkna fortfarande med att $\pi \approx 3$.

225. Du klavar ett träd och konstaterar att diametern idag är 32 cm på bark. Den enkla barktjockleken mäter du upp till 10 mm. Antag att du tidigare, för flera år sedan, klavat trädet och att det då var 22 cm på bark. Antag vidare att barktjockleken vid förra mättillfället var lika stor som idag. Med hur många cm^2 har grundytan *under bark* ökat med under perioden? Använd att $\pi \approx 3$.

226. Du ska lägga ut en provyta som ska ha arean 900 m^2.

a) Antag att ytan ska vara kvadratisk. Beteckna den okända sidan med x. Vilken ekvation kan du ställa upp?

b) Lös ekvationen. Hur lång blir sidan i a)?

227. Du ska lägga ut en provyta som ska ha arean 108 m^2.

a) Antag att ytan ska vara cirkulär. Beteckna cirkelns radie med x. Vilken ekvation kan du ställa upp?

b) Använd att $\pi \approx 3$. Lös ekvationen. Hur lång blir radien i a)?

228. I en planteringsinstruktion står det att man ska plantera 2 500 plantor per hektar.

a) Använd dimensionsräkning för att beräkna hur många m^2 varje planta får.

b) Antag att varje planta får ett kvadratiskt område av samma storlek som i a) tilldelat sig. Hur många meter kommer det då att vara mellan plantorna?

c) Antag att man ska plantera x plantor per hektar. Skriv en formel innehållande x och som beräknar y = avståndet mellan plantorna. Om man stoppar in $x = 2\,500$ i formeln ska man alltså få svaret i uppgift b).

VOLYMBERÄKNING

När man beräknar volymer brukar man ofta ha nytta av formlerna för area. Tänk dig en stock som inte har någon som helst avsmalning, alltså en stock som är exakt formad som en cylinder. Volymen för hela stocken får du då genom att multiplicera ytan i stockändan med stockens längd.

basytan · höjden = volymen

Om du beräknar ytan i dm^2 och längden i dm så kommer volymen att få enheten:

$dm^2 \cdot dm = dm^3$

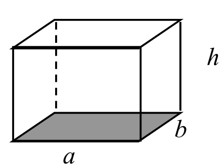
Tänk dig på motsvarande sätt en bit ost, formad såsom den brukar vara när du köper den i affären. Om du kan räkna ut arean i botten på osten i cm^2 och sedan multiplicerar denna area med ostens höjd i cm så kommer du att få volymen i cm^3.

Både i fallet med stocken och i fallet med osten kan du dela upp kropparna i tunna lager (/tvärsnitt) med exakt samma area hela tiden. Om det går blir formeln för volymen som angavs ovan.

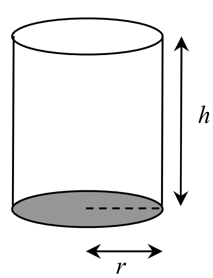
Om man däremot har en kon (som ju är strutformad) så kommer tvärsnitten att få olika areor, beroende på hur långt från botten man kommer. För en kon kan alltså inte ovanstående formel fungera. Matematiker har visat att konens volym är precis en tredjedel av cylinderns.

Följande formler bör du kunna utantill:

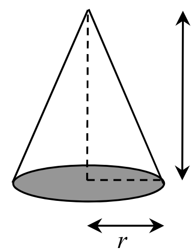
Rätblockets volym = Basyta · höjd = $a \cdot b \cdot h$



Cylinderns volym = Basyta · höjd = $\pi \cdot r^2 \cdot h$



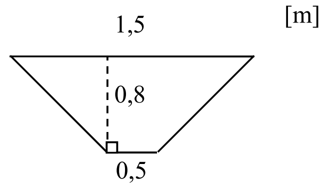
Konens volym $= \frac{1}{3} \cdot$ Cylinderns volym $= \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$



ÖVNINGAR

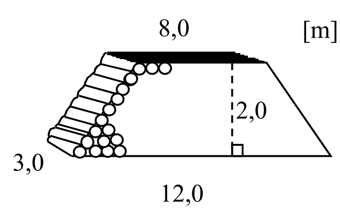
☞ *Beräkna utan miniräknare*

229. Ett dike har en genomskärningsyta som ser ut som på bilden. Dikets längd är 200 meter. Uppskatta hur mycket jorden vägde som behövde schaktas bort. Räkna med att 1 m^3 jord väger 1,5 ton.



230. Uppskatta vikten av en 5 meter lång bräda som är 2 cm tjock 12 cm bred. Räkna med att 1 dm^3 väger 0,8 kg.

231. Uppskatta vikten av traven på bilden. Räkna med att varje travad kubikmeter motsvarar 600 kg. Svara avrundat till hela ton.



232. Räkna i denna uppgift med att $\pi \approx 3$. En trädstam har en diameter nere vid roten på 20 cm och en höjd på 18 meter. Antag att nedre halvan av stammen är formad som en cylinder och den övre halvan som en kon.

a) Vilken volym har trädstammen uttryckt i m^3?

b) Beräkna *formtalet* dvs. hur många procent av en tänkt cylinder med diameter 20 cm och höjd 18 meter som stammen kommer att utgöra.