EKVATIONER

I detta avsnitt ska vi titta på den enklaste formen av ekvationer – de linjära.

ALGEBRAISK LÖSNING AV EKVATIONER

Metoden när man löser ekvationer av första graden, alltså ekvationer som innehåller x-termer men ej termer av typen x^2, x^3, … är hela tiden densamma:

1. Utför parentesmultiplikation.
2. Samla x-termerna på ena sidan av likamedtecknet och konstanterna (/siffrorna) på den andra.
3. Gör x fritt på ena sidan.

När man flyttar över en term från ena sidan till den andra i ekvationen måste man komma ihåg att byta tecken.

EXEMPEL 1

Lös ekvationen: $43 = 5(3{,}6 - x)$

* * *

$43 = 5(3{,}6 - x)$	
$43 = 5 \cdot 3{,}6 - 5 \cdot x$	Utför parentesmultiplikation
$43 = 18 - 5x$	
$43 - 18 = -5x$	Samla x-termerna på ena sidan
$25 = -5x$	
$25 / -5 = x$	Gör x fritt
$-5 = x$	

Här får vi alltså svaret x = -5. Det går lätt att kontrollera att detta är rätt. Vi stoppar helt enkelt in -5 istället för x i det ursprungliga uttrycket och kontrollerar att detta ger resultatet 43.

Kontroll: $5(3{,}6 - -5) = 5 \cdot (3{,}6 + 5) = 5 \cdot 8{,}6 = 5 \cdot 8 + 5 \cdot 0{,}6 = 43$ OK!

❑

EXEMPEL 2

Lös ekvationen: $2(x - 1) - 4(3 - 2x) = 1$

* * *

$2(x - 1) - 4(3 - 2x) = 1$

$2x - 2 - 12 + 8x = 1$

$10x - 14 = 1$

$10x = 1 + 14$

$10x = 15$

$x = 15/10$

$x = 1{,}5$

Kontroll: $2(1{,}5 - 1) - 4(3 - 2 \cdot 1{,}5) = 2(0{,}5) - 4(0) = 1 - 0 = 1$ OK!

❑

ÖVNINGAR

☞ Lös följande ekvationer

401 **a)** $11 - x = 22$ **b)** $20x = 12$

c) $x / 8 - 4 = 4$ **d)** $3{,}5 = 4{,}1 - 3x$

402 **a)** $\frac{1}{8}x + 3 = 4$ **b)** $\frac{x}{0{,}4} + 1{,}74 = -0{,}26$

c) $\frac{1}{9}x - 5 = 13$ **d)** $\frac{10x}{12} - 8 = 2$

403 **a)** $18 + 2x = -8x$ **b)** $1{,}25x = 1\ 250$

c) $6x = -3x$ **d)** $-6x - 3 = -4x + 8$

404 **a)** $3x - 12 = -5x$ **b)** $14 - 3x = -x$

c) $3 - 5x = 3x - 5$ **d)** $14 - 2x = -4x - 10$

405 **a)** $2x + 22 = 0$ **b)** $80 + 6x = 20$

c) $16 - 0{,}5x = 8$ **d)** $100x - 0{,}55 = 1{,}25$

406 **a)** $5 + \frac{5x}{7} = 15$ **b)** $\frac{2x}{3} - 5 = 9$

c) $\frac{3x}{4} = 1{,}25 + x$ **d)** $10 - 6x = 25 - 5x$

407 **a)** $5x + (3 + 2x) = x + 21$ **b)** $(x + 2)(x + 5) = x(x + 3)$

c) $15x + 25 = 3x + 61$ **d)** $7x - 6 = 5x + 16$

408 **a)** $2(x + 1) - 3(x - 2) = 4(x - 3)$

b) $(x - 1)(x + 1) - (x - 2)^2 = 2$

c) $-2x = (x + 2)(x - 2) - (x - 2)^2$

d) $8x + 9 - (6x - 8) = 13x - 4 - 5(1 - 0{,}4x)$

409 **a)** $5x - (2x - 3) = 2$

b) $9(x + 5) - 4(3 + 2x) = 7 - 2(x - 1)$

c) $9(x + 1)^2 - (3x - 1)(2 + 3x) = 41$

d) $(x + 3)(x - 1) - (x - 3)^2 = 2x$

410 **a)** $3x - \frac{6x - 1}{4} = 7$

b) $2x(x+3)+2x-x(x+3)=x^2$

c) $(x+2)(x+5)=(x+3)(x+6)$

d) $5(x-3)-3(x+2)-(x-10)=0$

PROBLEMLÖSNING MED EKVATIONER

Om en siffra i ett problem är okänd kan man beteckna den med bokstaven x och försöka räkna som om man visste vad x hade för värde. På så vis kan man få en ekvation som i bästa fall enkelt kan lösas. Ett exempel illustrerar.

EXEMPEL 3

Hur mycket vatten ska tillsättas 3 hg av en 20%-ig saltlösning för att salthalten ska bli 12 %?

* * *

Antag att x hg vatten ska tillsättas.

Mängd salt: 20 % av 3 hg = $0{,}20 \cdot 3$ hg = 0,6 hg

Total vikt efter att x hg vatten tillsatts: $x + 3$

Genom att dividera vikten salt med totalvikten ska 12 % = 0,12 fås. Vi får alltså ekvationen:

$$\frac{0{,}6}{x+3}=0{,}12$$
$$0{,}6=0{,}12\cdot(x+3)$$
$$0{,}6=0{,}12x+0{,}36$$
$$0{,}6-0{,}36=0{,}12x$$
$$0{,}24=0{,}12x$$
$$\frac{0{,}24}{0{,}12}=x$$
$$x=2$$

Svar: Genom att tillsätta 2 hg vatten blir blandningen 12%-ig.

❑

ÖVNINGAR

☞ **Ställ upp ekvationer för att lösa följande problem**

411. Kursen på en aktie har under ett år ökat med 20 % till 60 kr.

a) Vad blir ändringsfaktorn i exemplet?

b) Om kursen *före* ökning betecknas med x, vilken ekvation kan då ställas upp?

c) Vad ger ekvationen för lösning, vilken var kursen före ökningen?

412. En rektangelformad provyta utlagd i skogen är 144 m^2. Längden på ena sidan är 36 meter. Beräkna längden av den andra sidan.

413. Du ska lägga ut en cirkulär provyta i skogen med arean 300 m^2. Vilken radie ska du välja? Räkna med att π är 3.

414. Du ska lägga ut en cirkulär provyta i skogen som har lika stor *area* som en rektangel med sidorna 24,3 och 10 m. Vilken radie ska du välja? $\pi \approx 3$

415. Du ska lägga ut en cirkulär provyta i skogen som har lika stor *omkrets* som en kvadrat med sidan 12 m. Vilken radie ska du välja? $\pi \approx 3$

416. En person får betala 33 % i skatt och får efter skatt ut 16 500 kr netto varje månad. Vilken är hennes bruttolön? Lös problemet genom att ställa upp en ekvation där x betecknar bruttolönen.

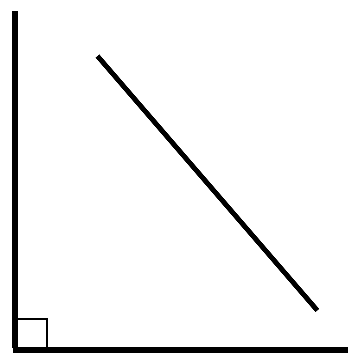
417. I skogen används olika sätt att räkna kubikmeter. Om man har volymen under bark kan man för tall få volymen på bark (inklusive bark) genom att lägga på 20 %. Antag att vi har 600 m^3 tall *på* bark, hur mycket motsvarar det *under* bark? Sätt upp en ekvation där x betecknar volymen tall under bark. Hur många m^3 under bark blir det?

418. Ett skogsbestånd som innehåller 10 000 m^3 delas upp i två delbestånd A och B där B är tre gånger så stort som A. Utgå från att virkesförrådet är jämnt fördelat över arealen. Hur många m^3 hamnar i A och hur många i B? Lös problemet genom en ekvation där x betecknar antalet kubikmeter i del A.

419. Hur mycket vatten ska tillsättas 2 kg av en 10%-ig saltlösning för att blandningen ska bli 5%-ig? Låt x beteckna antalet kg vatten som tillsätts. Ställ upp och lös en ekvation för problemet.

Pythagoras sats

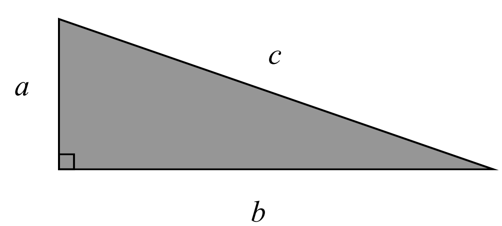
För rätvinkliga trianglar gäller Pythagoras sats. Om du t.ex. tar tre tändstickor så kan du inte bilda en rätvinklig triangel med hjälp av dessa. Om du lägger två stickor så att de bildar en rät vinkel så räcker inte den tredje stickan till för att få kontakt med de båda andra.



Annorlunda uttryckt bestämmer längden på kateterna (sidorna som bildar rät vinkel med varandra) hur lång hypotenusan ska vara. Detta upptäckte den grekiske filosofen och matematikern Pythagoras ca 550 f.Kr.

I alla rätvinkliga trianglar med kateterna a och b och hypotenusan c så gäller Pythagoras sats:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Vid praktisk räkning är det viktigt att hålla reda på vilka sidor som är kateter (a och b i figuren ovan) och vilken sida som är hypotenusa (c i figuren). Den lilla fyrkanten i nedre vänstra hörnet markerar att vinkeln mellan sidorna a och b är rät (90°).

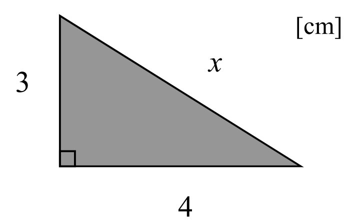
EXEMPEL 4

I en rätvinklig triangel är kateterna 3 respektive 4 cm långa. Bestäm längden på hypotenusan.

* * *

Antag att hypotenusan är x cm lång. Pythagoras sats ger följande ekvation:

$$3^2 + 4^2 = x^2$$
$$9 + 16 = x^2$$
$$25 = x^2$$
$$x = \sqrt{25}$$
$$x = 5$$

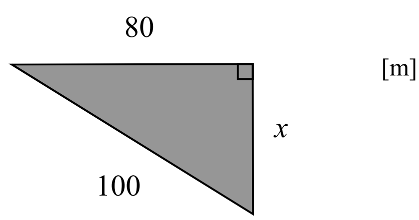


Svar: Sidan markerad med x är 5 cm lång.

❑

EXEMPEL 5

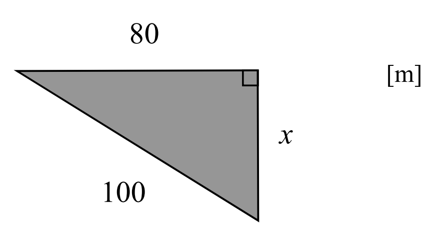
Hur lång är sträckan markerad med x i figuren nedan?



* * *

Nu är det inte hypotenusan utan kateten som är okänd. Pythagoras sats ger:

$$80^2 + x^2 = 100^2$$
$$6400 + x^2 = 10000$$
$$x^2 = 10000 - 6400$$
$$x^2 = 3600$$
$$x = \sqrt{3600}$$
$$x = 60$$



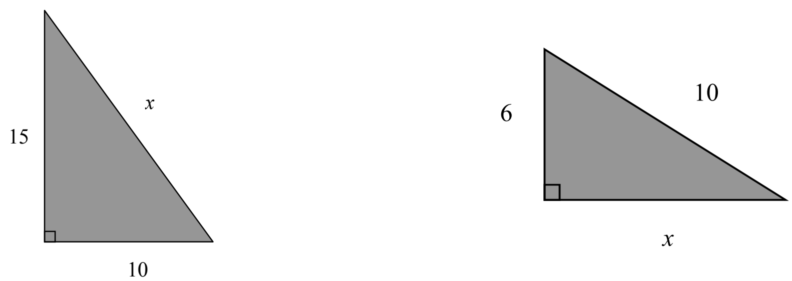
Svar: Sidan markerad med x är 60 meter.

❑

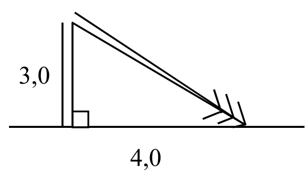
ÖVNINGAR

☞ ***Använd ekvationer för att lösa nedanstående problem.***

420. Bestäm längden på sidan markerad med x i nedanstående två figurer. Svara avrundat till närmaste heltal.



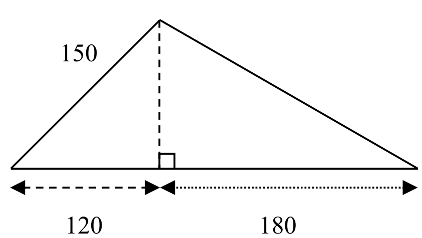
421. Ett träd har brutits av enligt figuren nedan så att det bildar en triangel mot markplanet. Uppskatta hur högt det ursprungligen var. Svara i meter avrundat till en decimal.



422. Beräkna den tredje sidan i en rätvinklig triangel där hypotenusan är 15 mm och en katet 9 mm. Svara i hela mm.

423. Beräkna längden på diagonalen i en rektangel vars ena sida är 80 m och andra 60 m. Svara avrundat till hela meter.

424. Beräkna hela triangelns area genom att först bestämma höjden mot basen. Enheten på sträckorna är i m. Svara i hektar med en decimal.



Förlänga och förkorta

I ett språk kan man ofta uttrycka samma sak på flera olika sätt. På samma sätt kan man i matematiken uttrycka ett tal eller en matematisk funktion på flera olika sätt. Ta t.ex. bråket ½.

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\ldots=\frac{30}{60}$$

En halv timma är ju detsamma som 2 kvartar (av totalt fyra) eller detsamma som tre tiominutersperioder (av totalt sex) och 30 minuter (av totalt sextio).

I många sammanhang vill man uttrycka ett bråk på ett så enkelt sätt som möjligt. Formen 1/2 är ett enklare sätt än 30/60. Om vi t.ex. ska förenkla bråket 90/360 får vi:

$$\frac{90}{360}=\frac{9\cdot 10}{36\cdot 10}=\frac{9}{36}=\frac{9}{9\cdot 4}=\frac{1}{4}$$

Eftersom vi har multiplikation med 10 både över och under divisionsstrecket så kan denna faktor förkortas bort. På motsvarande vis kan nian förkortas bort senare.

På samma sätt kan ett uttryck med bokstäver förenklas genom att man förkortar bort gemensamma faktorer över och under bråkstrecket. Här nedan utnyttjar vi att 120 kan skrivas om som 5 · 24 och x^2 som $x \cdot x$.

$$\frac{5x}{120x^2}=\frac{5\cdot x}{5\cdot 24\cdot x\cdot x}=\frac{1}{24x}$$

Motsatsen till att förkorta ett bråk är att förlänga det. När vi går från 1/2 till 30/60 kan man säga att vi förlängt bråket med 30. Vi har ju då multiplicerat både täljaren och nämnaren med denna faktor. På motsvarande vis kan man förlänga ett uttryck med bokstäver. I exemplet nedan har jag förlängt med 48*x*, d.v.s. multiplicerat med 48*x* både ovanför och under det långa bråkstrecket.

$$\frac{\frac{1}{24x}}{\frac{1}{48x}}=\frac{48x\frac{1}{24x}}{48x\frac{1}{48x}}=\frac{\frac{48x\cdot 1}{24x}}{\frac{48x\cdot 1}{48x}}=\frac{\frac{48x}{24x}}{\frac{48x}{48x}}=\frac{2}{1}=2$$

Att det här sista stämmer kan vi kontrollera m.h.a. räknereglerna för bråk (invertera bråket under det långa bråkstrecket):

$$\frac{\dfrac{1}{24x}}{\dfrac{1}{48x}} = \frac{1}{24x} \cdot \frac{48x}{1} = \frac{1 \cdot 48x}{24x \cdot 1} = \frac{48x}{24x} = \frac{48}{24} = \frac{2 \cdot 24}{24} = 2$$

I vissa lägen kan alltså tal förenklas genom att man först förlänger dem.

Övningar

425. Förläng följande kvoter så att du får en kvot med nämnare $18x$

a) $\frac{1}{9x}$ **b)** $\frac{7}{6x}$

c) $\frac{x}{9}$ **d)** x

e) $\frac{1}{3}$ **f)** $2x^2$

426. Bryt ut bokstaven y ur följande uttryck och förkorta sedan.

a) $\frac{2y^2 - y}{y}$ **b)** $\frac{2y - y^2}{y}$

c) $\frac{2xy^2 - y}{y}$ **d)** $\frac{2y^2 + 3y^3 - y^4}{y}$

427. Förenkla först täljaren. Bryt därefter ut och förkorta.

a) $\frac{(y-2)^2 - 4}{y}$ **b)** $\frac{(y-3)(y+3)+9}{y^3}$

c) $\frac{(y+3)(2y-4) - 2y^2}{y-6}$ **d)** $\frac{(1-y)(2y-4) + 2y(y-1)}{4}$

428. Förenkla följande genom att först förlänga med 6 i uppgift a) och med y i uppgift b).

a) $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\right)}{\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}\right)}$ **b)** $\dfrac{\left(\dfrac{3}{y}+3\right)}{\left(1+\dfrac{1}{y}\right)}$

LÖSA UT VARIABLER UR UTTRYCK

En annan hantering som vi kommer att ha nytta av under den här kursen är att kunna lösa ut en variabel (bokstav) ur en formel. Antag t.ex. att vi vill lösa ut bokstaven s ur formeln:

$$v=\frac{s}{t}$$

För att få s ensamt på höger sida måste vi bli av med t. Genom att multiplicera med t på båda sidor får vi:

$$t\cdot v=t\cdot\frac{s}{t}$$
$$t\cdot v=\frac{t\cdot s}{t}$$
$$t\cdot v=s$$

Alltså är: $s = t \cdot v$.

Arbetsgången är alltså exakt densamma som när vi löser följande enkla ekvation (om man här låter x motsvara det som var s ovan).

$$2=\frac{x}{3}$$
$$3\cdot 2=3\frac{x}{3}$$
$$6=\frac{3\cdot x}{3}$$
$$6=x$$

Eller hur?

Vi kan alltså använda samma teknik som när vi löste ekvationer för att lösa ut en variabel ur en formel. Jag ska ta några vanliga exempel till. På vänster sida i exempelrutan löser jag först en ekvation av samma typ så att du kan se parallellen. Därefter löser jag ut bokstaven i höger del av exempelrutan.

EXEMPEL 6

Lös ekvationen $9 = \frac{2}{x}$	Lös ut t ur formeln $v = \frac{s}{t}$
* * *	* * *
Ta ut MGN. Här blir MGN = x	MGN = t
Multiplicera alla termer med MGN:	Multiplicera:
$x \cdot 9 = x \cdot \frac{2}{x}$	$t \cdot v = t \cdot \frac{s}{t}$
$9x = \frac{x \cdot 2}{x}$	$t \cdot v = \frac{t \cdot s}{t}$
$9x = 2$	$t \cdot v = s$
$x = \frac{2}{9}$	$t = \frac{s}{v}$
	❑

EXEMPEL 7

Lös ekvationen $8 = 5 + 0{,}25x$	Lös ut t ur formeln $v = r + at$
* * *	* * *
$8 = 5 + 0{,}25x$	$v - r = at$
$8 - 5 = 0{,}25x$	$\frac{v-r}{a} = t$
$3 = 0{,}25x$	$t = \frac{v-r}{a}$
$\frac{3}{0{,}25} = x$	
$12 = x$	
	❑

EXEMPEL 8

Lös ekvationen $8 = \frac{5}{6} + \frac{2}{x}$

* * *

Ta ut MGN. Här blir MGN = $6x$
Multiplicera alla termer med MGN:

$$6x \cdot 8 = 6x \cdot \frac{5}{6} + 6x \cdot \frac{2}{x}$$

$$48x = \frac{6x \cdot 5}{6} + \frac{6x \cdot 2}{x}$$

$$48x = 5x + 12$$

$$48x - 5x = 12$$

$$43x = 12$$

$$x = \frac{12}{43}$$

Lös ut t ur formeln $a = \frac{a}{2} + \frac{s}{t}$

* * *

MGN = $2t$
Multiplicera:

$$2t \cdot a = 2t \cdot \frac{a}{2} + 2t \cdot \frac{s}{t}$$

$$2t \cdot a = \frac{2t \cdot a}{2} + \frac{2t \cdot s}{t}$$

$$2ta = ta + 2s$$

$$2ta - ta = 2s$$

$$ta = 2s$$

$$t = \frac{2s}{a}$$

❑

EXEMPEL 9

Lös ekvationen nedan.

* * *

$$x(1-x) + 5 = 9x - x^2$$

$$x - x^2 + 5 = 9x - x^2$$

$$x + 5 = 9x - x^2 + x^2$$

$$x + 5 = 9x$$

$$5 = 9x - x$$

$$5 = 8x$$

$$\frac{5}{8} = x$$

Lös ut t ur nedanstående formel.

* * *

$$t(1-t) + 5 = a^2 t - t^2$$

$$t - t^2 + 5 = a^2 t - t^2$$

$$t + 5 = a^2 t - t^2 + t^2$$

$$t + 5 = a^2 t$$

$$5 = a^2 t - t$$

Bryt ut t på höger sida:

$$5 = t(a^2 - 1)$$

$$\frac{5}{a^2 - 1} = t$$

$$t = \frac{5}{a^2 - 1}$$

❑

EXEMPEL 10

Skriv funktionen där t är utlöst, till höger i exempel 9, på en enda rad med så få parenteser som möjligt.

* * *

Ett långt bråkstreck innebär att vi behöver en extra parentes. I det här fallet är dock det som står ovanför bråkstrecket, 5, redan klart så vi behöver ingen parentes där.

Svar: $t = 5 / (a^2 - 1)$

❑

ÖVNINGAR

429. Lös ut x ur följande formler.

a) $y = 2x + 3$ **b)** $2y - 3x = -5$

c) $y = \frac{5}{6}x - 1$ **d)** $3y = 2x + 3$

430. Lös ut z ur följande formler.

a) $4y - 3z + 13 = 0$ **b)** $-3x + 4z - 9 = 0$

c) $0 = x - 7z - 3$ **d)** $5z - y = y + 7z - 3$

431. Lös ut r ur följande formler.

a) $\frac{1}{r} = x$ **b)** $\frac{r}{x} + z = 2$

c) $4 = \frac{x}{r} - z$ **d)** $5 = \frac{1}{r} - 3$

432. Lös ut a ur följande formler.

a) $a(a - b) = (a + 2)(a - 1)$ **b)** $0 = 7(ax - 3)$

c) $\frac{1}{a} + \frac{2}{a} = \frac{x}{3} + 2$ **d)** $\frac{1}{a} - 5x = 4$

433. Lös ut den bokstav som står innanför parentes efter följande formler.

a) $s = v \cdot t$ (t)

b) $d = \frac{m}{V}$ (V)

c) $v = v_0 + at$ (a)

d) $a = f^2 kR$ (f)

434. Skriv formlerna för de utlösta variablerna i uppgift 433 på en enda rad, med så få parenteser som möjligt.