

INNEHÅLL

1. Matematiska beräkningar	1
1.1 Inledning	1
1.2 Prioritet	2
1.3 Inställningar på Casio fx-82CW	7
1.4 Horisontella bråkstreck	8
1.5 Avrundningar	10
1.6 Prioritet och parenteser i MS-Excel och på räknare	12
1.7 Att dela upp beräkningar	14
1.8 Potenser	15
1.9 Grundpotensform	17
1.10 Fler inbyggda funktioner på räknaren	20
<i>Facit och kommentarer till uppgifter i kapitel 1</i>	<i>25</i>
2. Matematiska formler	31
2.1 Uttryck	31
2.2 Enhetsbyten	35
2.3 Omkrets och areaberäkning	37
2.4 Volymberäkning	44
2.5 Likformig avbildning	45
2.6 Bestämning av <i>sträcka</i> med tangens	47
2.7 Bestämning av <i>vinkel</i> med tangens	50
2.8 Lutningsprocent	53
<i>Facit och kommentarer till uppgifter i kapitel 2</i>	<i>55</i>
3. Procenträkning och skogliga tillämpningar	65
3.1 Procenträkning	65
3.2 Skogskartan – en modell av verkligheten	70
3.3 Trädstammens volym	73
3.4 Beståndets volym	74
3.5 Stockens volym	74
3.6 Mer om enhetsomvandling	77
<i>Facit och kommentarer till uppgifter i kapitel 3</i>	<i>85</i>
4. Ekvationer och matematiska modeller	93
4.1 Algebraisk lösning av ekvationer	93
4.2 Problemlösning med ekvationer	95
4.3 Pythagoras sats	97
4.4 Matematiska modeller	100
4.5 Linjära funktioner	105
4.6 Funktionens graf och värdetabeller	104
<i>Facit och kommentarer till uppgifter i kapitel 4</i>	<i>111</i>

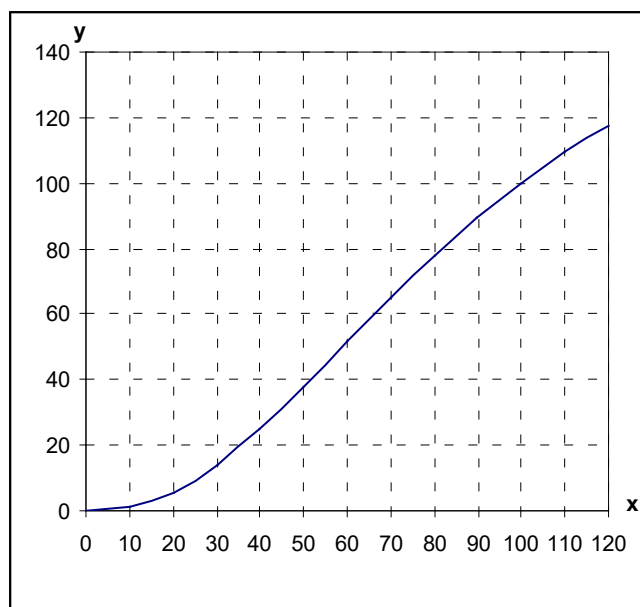
1. MATEMATISKA BERÄKNINGAR

I det här studieavsnittet ska vi repetera det som du ska ha med dig från gymnasieskolan i matematik för att vara behörig till skogsmästarprogrammet. Repetitionskursen motsvarar ungefär kursen Matematik II på gymnasiet. De bitar som framför allt ingår är de som vi bedömer att du kommer att ha nytta av i din framtida karriär inom skogsbranschen.

Innan vi går in på den rena matematiken och dess skogliga tillämpningar ska vi dock först ta lite grundläggande om matematisk prioritet och sedan om miniräknaren. Den räknare som vi använder här i kursen är Casio fx-82CW. För att förutsättningarna ska vara så likartade som möjligt vid examinationen (/provet) i matematik.

1.1 Inledning

Du kanske inte har tänkt på det, men matematik är faktiskt i sig ett språk. Studera figur 1.1 nedan och tänk dig att du med ord skulle beskriva den kurvan i den här bilden för en annan person över telefon.



Figur 1.1 Ett exempel på en matematisk funktion.

Förmodligen blir det en ganska mångordig och ändå lite ungefärlig beskrivning av kurvan. På matematikens språk kan vi genom att endast ange några få tecken, i vårt exempel: $164,16(1-6,3582 \cdot x/100)^{2,896}$ *exakt* beskriva hur kurvan ser ut.

Varför vill man då beskriva en kurva av den typ som visas i figuren ovan? Jo, med hjälp av en sådan här kurva – funktionens graf – kan man visa hur saker och ting hänger samman. Just det här exemplet är hämtat från produktionsmallen för gran (G28:6). På den horisontella x -axeln har vi beståndets ålder i år och på den vertikala y -axeln beståndets löpande tillväxt i $\text{m}^3\text{sk/ha}$. Syftet med kurvan är att kunna förutsäga hur virkesförrådet kommer att utvecklas över tiden för att därmed kunna hitta en ur produktionssynpunkt optimal tidpunkt för avverkning.

Självklart är denna matematiska kurva bara en *modell* av verkligheten. I realiteten kanske beståndet inte alls kommer att utvecklas så som kurvan visar. Mycket av dagens forskning, även den skogliga, syftar till att skapa modeller för att förutsäga framtiden.

1.2 Prioritet

När vi ska använda en skriven matematisk formel finns det en viss praxis för hur den ska tolkas. Praxisen gäller räknesättens *prioritet*, dvs. i vilken ordning beräkningarna ska utföras.

EXEMPEL 1.1

I ett bestånd finns ett samband mellan trädens brösthöjdsdiameter i cm (x) och deras höjd i meter (y). För ett visst bestånd gäller:

$$y = 9 + 0,4 x$$

Vad kommer ett träd med diameter 10 cm att ha för höjd enligt formeln?

* * *

Eftersom diametern var 10 kan vi byta ut x mot 10 i formeln:

$$y = 9 + 0,4 \cdot 10$$

Vad menas då med detta? Jo, mellan 0,4 och x i formeln finns inget tecken, men i matematiken underförstås då att det finns ett osynligt gångertecken mellan dessa. Vi har alltså:

$$y = 9 + 0,4 \cdot 10$$

Nästa fråga är vad vi ska göra först när vi räknar ut detta; ska vi lägga ihop 9 och 0,4 eller utföra multiplikationen $0,4 \cdot 10$ först?

Enligt de prioriteringsregler som finns så ska multiplikationen tas före additionen; gånger går alltså före plus. Vi får:

$$\begin{aligned} y &= 9 + 0,4 \cdot 10 \\ y &= 9 + 4 \\ y &= 13 \end{aligned}$$

Ett träd med brösthöjdsdiameter (brh-diameter) 10 cm har alltså en höjd på 13 meter.



Svaret ovan, 13 meter, innehåller dels ett *siffervärde* och dels en *enhet*. Siffervärdet är "13" och enheten är "meter". Vi skulle också kunnat uttrycka svaret i enheten cm. I så fall hade siffervärdet blivit "1 300" och enheten "cm".

Du kanske är van vid att man får samma enhet på det värde som kommer *ut* ur formeln som det värde man stoppar *in*, men så är det inte alltid i skogliga exempel. I Exempel 1 stoppade vi in diametern i cm och fick ändå resultatet i meter. Detta beror på att modellen är gjord så att den ska vara så enkel att arbeta med som möjligt. Eftersom man oftast brukar mäta diametern i cm och höjden i meter så fungerar också formeln så att den använder dessa enheter direkt. Hade vi fått höjden i cm hade vi ju varit tvungna att omvandla svaret till meter, vilket ger ett extra och onödigt steg.

De vanligaste fyra räknesätten är:

ADDITION:	$78 + 39 = 117$
	Term Term Summa
SUBTRAKTION:	$78 - 39 = 39$
	Term Term Differens
MULTIPLIKATION:	$78 \cdot 39 = 3\,042$
	Faktor Faktor Produkt
DIVISION:	$78 / 39 = 2$
	Täljare Nämnare Kvot

I de matematiska modeller vi kommer att arbeta med i kursen kommer vi dessutom ofta att använda upphöjt till:

UPPHÖJT:	$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$
	Bas Exponent

Som vi såg i Exempel 1 förekommer ibland flera olika räknesätt i en och samma formel. För att undvika förvirring om vad man menar när man ska kommunicera formler mellan olika personer har man bestämt att de ska tas i följande ordning:

1. Parenteser
2. Upphöjt till
3. Multiplikation och division
4. Addition och subtraktion

Denna ordning fungerar ungefär som trafikregler. På samma sätt som vi vet att en bil från höger har förkörsrätt, så ska vi veta att gånger går före plus i matematiken.

Här kommer nu ett antal exempel. Läs igenom dem och se att du förstår varför resultaten blir som de blir.

EXEMPEL 1.2

$$2 + 8 \cdot 4 = 2 + 32 = 34$$

**EXEMPEL 1.3**

$$(2 + 8) \cdot 4 = 10 \cdot 4 = 40$$

Parenteser ska alltid beräknas först.

**EXEMPEL 1.4**

$$3 \cdot 8 - 18 / 2 + 4$$

Detta tal består av tre termer: ❶: "3 · 8" ❷: "18 / 2" och ❸: "4". Var och en av dessa ska beräknas för sig innan vi lägger ihop de tre delarna.

❶: $3 \cdot 8 = 24$

❷: $18 / 2 = 9$ och

❸: 4, en term som redan är färdigberäknad klar. Stoppar vi in dessa uträkningar i det ursprungliga uttrycket ❶ - ❷ + ❸ får vi:

$$24 - 9 + 4 = 15 + 4 = 19$$

Observera att när "24 - 9 + 4" ska beräknas kan vi, om vi vill, först lägga ihop de *positiva* termerna 24 och 4 och sedan dra ifrån de negativa -9:

$$24 - 9 + 4 = 24 + 4 - 9 = 28 - 9 = 19$$

**EXEMPEL 1.5**

$$3 \cdot 8 - 18 / (2 + 4)$$

Jämför detta med Exempel 4. Det enda som tillkommit är en parentes. I det här exemplet finns det nu *två* olika termer: ❶: " $3 \cdot 8$ " och ❷: " $18 / (2 + 4)$ ". Var och en av dessa ska räknas ut för sig:

$$\text{❶: } 3 \cdot 8 = 24$$

$$\text{❷: } 18 / (2 + 4) = 18 / 6 = 3. \text{ Parentesen går ju först här.}$$

Sätter vi ihop detta får vi ❶ – ❷:

$$24 - 3 = 21$$



EXEMPEL 1.6

$$(2 + 8)^4 + 80 \cdot 10$$

Det finns två termer: ❶: $(2 + 8)^4$ och ❷: $80 \cdot 10$.

❶: I den första termen börjar vi med parentesen: $(2 + 8)^4 = 10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$.

❷: I den andra får vi 800. Sammansatt blir detta:

$$\text{❶} + \text{❷} = 10\,000 + 800 = 10\,800$$



EXEMPEL 1.7

$$(12 + 8)(5 - 2) - 3(8 + 2) + 2^{3+1}$$

Här har vi tre termer. Kan du på egen hand urskilja dem? De olika termerna avgränsas av tecken med *låg* prioritet, dvs. med + och –.

$$\text{❶: } (12 + 8)(5 - 2) = 20 \cdot 3 = 60$$

$$\text{❷: } 3(8 + 2) = 3 \cdot 10 = 30$$

$$\text{❸: } 2^{3+1} = ?$$

I ❸ borde ju enligt prioritetsreglerna 2^3 beräknas först och därefter ettan läggas till (upphöjt går ju före plus). Så blir det inte eftersom " $3+1$ " står med små tecken. Därmed underförstås en osynlig parentes runt det upphöjda $3 + 1$. Vi får alltså:

$$\text{❸: } 2^{3+1} = 2^{(3+1)} = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

Sammantaget ❶ – ❷ + ❸ blir det då:

$$60 - 30 + 16 = 30 + 16 = 46$$



EXEMPEL 1.8

$$\frac{10 - 2 \cdot 3}{6 \cdot 5 + 10}$$

Vi har egentligen bara en enda term här. Det långa bråkstrecket innebär underförstått också en osynlig parentes runt det som står *ovanför* ❶ och en annan parentes runt det som står *under* bråkstrecket ❷. Alltså:

$$\frac{(10 - 2 \cdot 3)}{(6 \cdot 5 + 10)}$$

Täljaren ❶: $(10 - 2 \cdot 3) = 10 - 6 = 4$

Nämnamren ❷: $(6 \cdot 5 + 10) = 30 + 10 = 40$

Sammantaget får vi:

$$\frac{10 - 2 \cdot 3}{6 \cdot 5 + 10} = \frac{4}{40} = 0,1$$



EXEMPEL 1.9

$$4 / 2 \cdot 3$$

Det här talet brukar ofta missförstås. Ska vi tolka det som $(4 / 2) \cdot 3$ eller som $4 / (2 \cdot 3)$? Resultaten blir helt olika i dessa två fall. Praxis är att det är den första tolkningen här som gäller. Beräkningen ska utföras från vänster till höger precis i den ordning räknasätten står. Vi ska alltså *först* utföra divisionen och *sedan* multiplikationen. Om man vill ha den andra tolkningen måste man alltså lägga till en extra parentes runt "2 · 3".

Så här ska det alltså tolkas:

$$4 / 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$$



1.3 Inställningar Casio fx-82CW

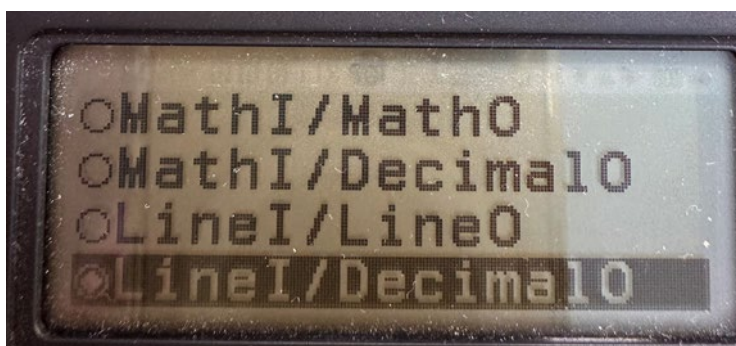
Nu ska vi använda räknaren. När du slår på räknaren första gången är det några saker som ska ställas in. Dessa inställningar ligger i normalfallet kvar även när du slår av och slår på räknaren igen – men ibland kan de falla ur, varför det är bra om du vet hur du återställer räknaren till detta läge igen.

1.3.1 Decimalinställning

Om du testar att slå $1/3$, alltså $1 \div 3$ [EXE] på räknaren så svarar den förmodligen i bråkform: $\frac{1}{3}$, men vi vill här i kursen att den ska svara i decimalform alltså 0.333333333. För att få räknaren att presentera talet i decimalform istället gör du så här:



1. Slå på räknaren och tryck på knappen [Settings]. En meny med fyra alternativ visas och du väljer det första alternativet: "Calc settings". Du väljer i menyerna genom att gå med uppåt och nedåtpil och trycka på knappen [OK] när du står på önskat alternativ.
2. I nästa meny väljer du på motsvarande vis "Input/Output" genom att trycka [OK].
3. I den meny som då visas här nedan väljer du det fjärde alternativet "LineI/Decimal0" genom att gå ner till det och trycka på [OK].



4. Backa slutligen ur menyn genom att trycka på knappen [AC].
5. Testa nu att slå $1 \div 3$ och kontrollera att svaret presenteras i decimalform med tio decimaler: 0.333333333.



1.3.2 Inmatning och redigering av tal

Nollställ räknaren med [AC]. Antag att du ska beräkna talet vi hade i exempel 2 tidigare som vi nu vet ska bli 34.

$$2 + 8 \cdot 4$$

När du matar in detta på Casio-räknaren (eller i Excel) är det bara att slå talet från vänster till höger precis som det skrivs. I Excel måste du dock alltid starta med ett =-tecken för att tala om att det kommer en formel.

Avsluta på räknaren genom ett tryck på knappen [EXE] och i Excel med ett tryck på [Enter]. Att räknaren klarar att multiplikationen går före additionen ser vi eftersom resultatet blir 34 och inte 40. Eller hur?

Antag nu istället att det tal du egentligen ville mata in var:

$$(2 + 8) \cdot 4$$

Du kan nu gå tillbaka till det tal du redan matat in och skjuta in parentes. Gör det genom att först trycka vänsterpil. Du hamnar då sist på raden du senast matat in efter $2 + 8 \times 4$. Använd nu piltangenterna så textinsättaren hamnar före tvåan, skriv in vänsterparentesen, använd högerpiltangent för att flytta dig efter åttan och lägg in högerparentesen där. Avsluta i vanlig ordning genom ett tryck på [EXE]. Har du gjort rätt ska resultatet som sagt bli 40.

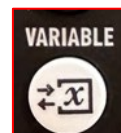
Antag nu att du istället ska beräkna:

$$(33 + 8) \cdot 4$$

Du ska alltså byta ut 2 i förra beräkningen mot 33. Tryck då först vänsterpil, ställ dig efter tvåan med knappen "backsteg" kan du nu ta bort tvåan och skriva in 33 istället. Sedan är det bara att trycka [EXE] igen och svaret 164 visas på skärmen.

1.3.3 Stoppa in resultat i räknarens minne

Om du har ett resultat på skärmen – som nu svaret 164 från föregående beräkning – så stoppar du enkelt in det i något av räknarens minnen genom att trycka knappen **[Variable]**. Välj sedan där om du vill stoppa in talet i minne A, B, C,... Vill du ha det i minne A ställer du dig på "A=" och trycker [EXE] och i den meny som då visas väljer du "Store" för att lagra värdet i minne A.



Du kan nu enkelt ta fram talet i en beräkning igen genom att trycka på den blå knappen [$\uparrow$] "Shift" och sedan tangenten med 4 eftersom den har ett blått A över sig. A visas och trycker du [EXE] får du 164 igen på skärmen.

Observera att du även kan mata in formler typ:

$$8 \times A - 255$$

Detta ger med $A = 164$ resultatet 1 057.

Observera att även om du slår av och slår på räknaren så ligger 164 kvar i minne A. Du kan alltid se vilka värden som ligger i räknarens minnen genom att trycka på knappen [Variable].

1.4 Horisontella bråkstreck

Idag ska ofta formlerna man använder i skogen matas in i en dator eller mobil. Då kan man normalt inte mata in formlerna med ett horisontellt

bråkstreck av den typ vi hade i Exempel 1.8 ovan. I datorn måste man mata in hela formeln på en och samma rad och får då använda tecknet $\div$ för divisionen. När man översätter formler skrivna med långa horisontella bråkstreck till formler skrivna med divisionstecknet $\div$ eller tecknet $/$ som används i Excel, kan det vara en bra regel att sätta en parentes runt hela uttrycket i täljaren och ytterligare en parentes runt hela uttrycket i nämnaren.

EXEMPEL 1.10

$\frac{2 \cdot 3 + 2}{2 \cdot 2}$ kan översättas med följande formel skriven på en rad:

Casio: $(2 \times 3 + 2) \div (2 \times 2)$

Excel: $= (2 * 3 + 2) / (2 * 2)$



ÖVNINGAR

Beräkna med miniräknare. Fundera hela tiden om svaret du får på räkna ren är rimligt.

101 a) $5 \cdot 8 + 3$

b) $5(8 + 3)$

c) $5 / 5 + 5$

d) $5 / (5 + 5)$

102 a) $(12 - 2) \cdot 3$

b) $12 - 2 \cdot 3$

c) $12 - (2 \cdot 3)$

d) $2 + 12 \cdot 3 - 18 / 2$

103 a) $(18 - 5) / (2 \cdot 6 + 1)$

b) $12 / 2 - 4 \cdot 2 + 13$

c) $8 \cdot 5 \cdot 4 - 3$

d) $8 \cdot 5(4 - 2)$

104 a) $9 + 5 \cdot 2 + 30 / 2$

b) $(8 + 2) \cdot 3 - (19 - 9)$

c) $3(8 - 3) - 2(2 \cdot 3 - 5)$

d) $\frac{7 \cdot 2^2}{6 \cdot 5 - 2}$

105 a) $4(7 \cdot 2^3 - 6)$

b) $5 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 0$

c) $\frac{8 - 4}{2} + 2 \cdot 3$

d) $\frac{20 / 4 + 1}{18 - 4 \cdot 4}$

106 a) $17 - 3 \cdot 10 / 2 + 4(3 - 1) - (10 - 4 \cdot 2)$

b) $8 \cdot 9 - 100 / (25 + 5^2) - 70 / 2 + 3$

☞ Beräkna med räknaren. Glöm inte att skjuta in parenteser där det behövs.

107 a) $\frac{8}{2 \cdot 4}$

b) $\frac{6 \cdot 6}{6 + 6}$

c) $\frac{4 + 4 \cdot 3}{5 + 3}$

d) $\frac{2 + 4 \cdot 3}{5 + 3 \cdot 3}$

108 a) $\frac{2 + 2(23 - 2)}{4 - 2}$

b) $\frac{9^2 - 1}{2(23 - 2) - 2}$

c) $\frac{8}{2 \cdot 4} + 3 \cdot \frac{9 + 3}{9 - 3}$

d) $\frac{2(8 - 4) + 3 \cdot 9}{5 + 6 \cdot 5}$

109 a) $\frac{17 - 8}{2 \cdot 6 - 3}$

b) $\frac{10}{2} \cdot \frac{8}{4}$
 $\frac{4}{2}$

c) $\frac{8 + 9 - \frac{8 \cdot 8}{2 \cdot 16}}{3}$

d) $\frac{2 \cdot 4 + \frac{27}{4 - 1} - \frac{32}{4 \cdot 4}}{9 - \frac{18}{3}}$

110 a) $\frac{\frac{52 \cdot 3}{4} - 36}{10 \cdot 14 - 6 \cdot 6 \cdot 3 + 1}$

b) $\frac{8}{\frac{3 \cdot 5 - 10}{4}}$
 $\frac{4}{7}$

1.5 Avrundningar

Som skogsmästare ska du alltså klara att hantera formler så att du kan mata in dem i datorer och räknare. Grundprinciperna är ofta desamma oavsett märke på räknaren eller mobilapplikation, men visst kan det också skilja en del. I denna framställning förklaras grunderna som gäller för Casioräknaren men ibland även för dataprogrammet MS-Excel. Även om du använder en annan räknare så går ändå övningarna att göra – svaret ska ju bli detsamma oavsett vilket verktyg man använder ☺.

Miniräknaren och datorn är fantastiskt bra på att snabbt ge resultatet av en kalkyl med stor noggrannhet. Det är dock väsentligt att hålla i minnet att om de värden som matas in inte är exakta så kan heller aldrig miniräknarens svar betraktas som exakt. Eller som man brukar uttrycka det "skit in - skit ut". Man bör därför aldrig presentera resultatet av en kalkyl med större noggrannhet än vad indata motiverar. Se till att avrunda svaret till ett *rimligt* antal decimaler!

Principen för avrundning är enkel: om man ska avrunda ett decimaltal till heltal så använder man det heltal som ligger närmast på tallinjen. Ligger decimaltalet precis mitt emellan två heltal avrundar man numera uppåt. Ska man avrunda till närmaste heltal så kommer alltså 4,3 att avrundas till 4; 4,7 avrundas till 5 och talet 4,5 precis mitt emellan 4 och 5 till 5.

Samma princip – avrunda till närmaste tal – kan användas även vid avrundning till tiotal, tiondel, hundradel o s v. Regeln blir alltså att om första siffran som ska tas bort är 0, 1, 2, 3 eller 4 så ska avrundningen ske *nedåt*, i de andra fallen (5, 6, 7, 8, 9) ska den ske *uppåt*.

EXEMPEL 1.11

Talet pi (π) är ett irrationellt tal som inte går att bestämma exakt. Det har oändligt många decimaler. Om du på räknaren trycker på den blå knappen [Shift] och sedan på siffran {7} och slutligen [EXE] får du de nio första decimalerna. De ser ut så här: $\pi \approx 3,141592654\dots$



Om π ska avrundas blir det till:

3	som heltal	(första siffran som ska tas bort 1 $\Rightarrow$ nedåt)
3,1	med en decimal	(första siffran som ska tas bort 4 $\Rightarrow$ nedåt)
3,14	med två decimaler	(första siffran som ska tas bort 1 $\Rightarrow$ nedåt)
3,142	med tre decimaler	(första siffran som ska tas bort 5 $\Rightarrow$ uppåt)



EXEMPEL 1.12

På en rektangulär yta i skogen som är uppmätt till 50 gånger 100 meter har man räknat till 737 stammar.

- Antag att mätningen av ytans sidor gjorts med en noggrannhet på 0,5 meter när. Hur stor kan ytans area maximalt respektive minimalt vara?
- Vad får man för uppskattning av stamantalet per hektar vid maximal respektive minimal yta?
- Hur bör då en korrekt avrundning av antalet stam/ha se ut?

* * *

a) Max: $50,5 \times 100,5 = 5075,25 \text{ m}^2 = 0,507525 \text{ ha}$

Min: $49,5 \times 99,5 = 4925,25 \text{ m}^2 = 0,492525 \text{ ha}$

b) Max: $737 / 0,492525 \approx 1\,496 \text{ stam/ha}$

Min: $737 / 0,507525 \approx 1\,452 \text{ stam/ha}$

c) Uppskattning: $737/0,50 = 1\,474 \text{ stam/ha}$

Uppgifterna a) och b) har dock visat på ett fel på 22 stammar upp eller ned. Ett vettigt svar bör avrundas till närmaste tiotal eller möjligen femtiotal.

Svar: 1 470 stam/ha.



1.6 Prioritet och parenteser i MS-Excel och på räknare

För att exemplen nedan ska stämma för Casioräknaren är det viktigt att du först ställer in så att svaren presenteras som decimaltal. Se tidigare avsnitt 1.3.

Tal givna med parenteser kan i allmänhet matas in precis som de står skrivna från vänster till höger. I Excel går det dock *inte* att utelämna gångertecken före parenteser (vilket däremot går bra att göra på Casioräknaren). Talet $2(3 - 5)$ ska alltså i Excel matas in som: $=2*(3 - 5)$ medan man på Casioräknaren kan skriva $2(3 - 5)$. Båda verktygen förstår att parenteserna först ska beräknas och delresultatet (-2) därefter ska multipliceras med 2. Resultatet i det här fallet blir alltså -4.

EXEMPEL 1.13

Beräkna med Excel och räknare: $8(3 + 8) - \frac{2 \cdot 16}{4}$

* * *

Excel: $=8*(3 + 8) - 2 * 16 / 4$ [ENTER]

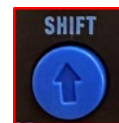
Observera att det måste vara ett gångertecken (*) efter första 8:an. När talet är inmatat utförs beräkningen med ett tryck på [ENTER] på tangentbordet eller genom ett klick på boken på inmatningsraden.

Casio: $8(3 + 8) - 2 \times 16 \div 4$ [EXE]

Svar: 80.



I Excel finns ett antal inbyggda funktioner. Bland de som hör till matematiken märks bl.a. funktionen PI() för att få π "pi" med många decimaler. Om man i en cell skriver: =PI() och trycker [ENTER] så får man alltså resultatet 3,14159265... På räknaren ligger π med många decimaler under sifferknappen 7. Du ser ett blått π -tecken där och måste alltså trycka på [SHIFT] först och sedan {7}.



På räknaren kan man backa upp till en tidigare inmatad beräkning genom att trycka på uppåtpil. Här finns också en **backstegsknapp** som tar bort tecknet till vänster. Med [SHIFT] {INS} kan man växla inställningen för om tecken ska skrivas över eller skjutas in.



EXEMPEL 1.14

Beräkna i Excel och med räknare: $8(3 + 8) - \frac{4}{2 \cdot 16}$

* * *

Skillnaden mot exempel 13 förut är att $2 \cdot 16$ nu har hamnat i bråkets nämnare. För att på ett riktigt sätt kalkylera detta måste $2 \cdot 16$ beräknas innan divisionen utförs. Eftersom långa bråkstreck inte kan matas in i datorn måste vi ha en parentes runt $2 \cdot 16$ för att den ska förstå detta.

Excel: =8*(3 + 8) - 4 / (2 * 16) [ENTER]

Casio: 8 (3 + 8) - 4 ÷ (2 × 16) [EXE]

Om man struntar i parentesen runt 2×16 kommer resultatet bli 56, vilket alltså är fel. Att det blir fel beror på att

$$\frac{4}{2 \cdot 16} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \quad \text{ej är detsamma som} \quad \frac{4}{2} \cdot 16 = 2 \cdot 16 = 32$$

Svar: 87,875



EXEMPEL 1.15

Beräkna med Excel och räknare: $\frac{3 + 10 - 2 \cdot 3}{5 + 2}$

* * *

Vid beräkning av kvoter med långa bråkstreck ska täljaren räknas ut för sig och nämnaren för sig. En variant är därför att skjuta in en parentes om täljaren och en om nämnaren.

Excel: $= (3 + 10 - 2 * 3) / (5 + 2)$ [ENTER]

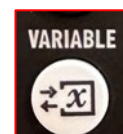
Casio: $(3 + 10 - 2 \times 3) \div (5 + 2)$ [EXE]

Svar: 1



1.7 Att dela upp beräkningar

I komplicerade beräkningar kan det vara en fördel att dela upp beräkningarna och först få ett delresultat som man sedan lagrar i ett minne innan man fortsätter beräkningen. Om du har en vanlig miniräknare finns det ofta minnen du kan använda för samma sak. På Casio fx-82 sätter du in det senaste svaret räknaren beräknat i minne A genom att trycka på knappen **VARIABLE**, välja det bokstavsminne du vill använda med piltangenterna, trycka [OK] och välja "Store".



Lagrar du en siffra i minne A kan du sedan ta fram den med knappen [SHIFT] {A} (alltså knappen med 4 eftersom det står ett blått A ovanför den).

EXEMPEL 1.16

Mata in: $\frac{8(3+8)}{3+10-2 \cdot 3}$ i räknaren.

* * *

Eftersom talet innehåller ett långt bråkstreck kan det vara vettigt att sätta en extra parentes om både täljare och nämnare. Eftersom det är multiplikation i täljaren mellan 8:an och parentesen är dock en extra parentes runt täljaren i det här fallet egentligen onödig. Parentesen runt nämnaren krävs dock.

Casio: $8(3 + 8) \div (3 + 10 - 2 \times 3)$ [EXE]

En extra parentes runt täljaren hade också gett samma svar.

Svar: $\approx 12,571$



EXEMPEL 1.17

Beräkna med räknaren: $\frac{2+3}{-8}$

* * *

Här måste vi ha en extra parentes runt $2 + 3$ annars kommer endast 3:an divideras med 8:an.

Casio: $(2 + 3) \div -8$ [EXE]

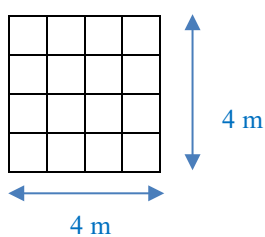
Svar: -0,625



Om du nu lagrar svaret du fått i Exempel 17 i minne A kan det sedan användas i nya beräkningar. Antag att vi vill multiplicera talet som ligger där med 5. Du skriver då bara i Casio: $A \times 5$. Detta ger svaret 62.8571...

1.8 Potenser

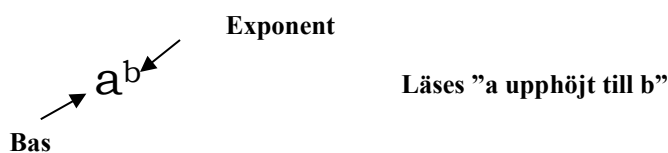
För att få arean av en kvadrat med sidlängd 4 meter ska vi multiplicera 4 med 4. Vi får då: $4 \cdot 4 = 16$ och enheten: $m \cdot m = m^2$ alltså $16 m^2$.



Figur 1.2 En kvadrat som är $4 m \times 4 m = 16 m^2$. Var och en av de 16 smårutorna i den stora rutan är alltså då kvadrater av storleken $1 m^2$.

Ett annat sätt att uttrycka detta är att vi för att beräkna kvadratens area tar "4 i kvadrat" eller "4 upphöjt till två".

Det var Decartes, en fransk matematiker som levde på 1500-talet, som först införde potenser i matematiken. En potens består av två tal, ett som kallas för *bas* och ett som kallas för *exponent*. Exponenten talar om hur många gånger basen ska tas gånger sig själv.



Arean av en kvadrat med sidan 4 kan uttryckas som:

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16 \text{ ("fyra i kvadrat" eller "fyra upphöjt till två")}$$

På motsvarande vis blir volymen för en kub med sidan 4:

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \text{ ("fyra i kubik" eller "fyra upphöjt till tre")}$$

Upphöjer vi till två blir det en *yta* medan om vi upphöjer till tre blir det en *volym*. Tar vi 4 m upphöjt till tre får vi:

$$(4\text{m})^3 = (4 \cdot \text{m}) \cdot (4 \cdot \text{m}) \cdot (4 \cdot \text{m}) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{m} = 64 \text{ m}^3.$$

Har enheten en upphöjd tvåa (som t.ex. i cm^2 är det en *yta* och har den en upphöjd trea (t.ex. dm^3) är det en enhet som beskriver en *volym*.

Även för bokstäver i formler kan potensuttrycket användas. T.ex. i formeln för cirkelns area: $\pi \cdot r \cdot r = \pi \cdot r^2$ ("Arean är pi gånger radien i kvadrat").

För potenser gäller räknereglererna i Tabell 1.1 nedan.

Tabell 1.1. Räkneregler för potenser.

Regel	Exempel
1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6 = 729$
2. $a^x / a^y = a^{x-y}$	$3^4 / 3^2 = 3^{4-2} = 3^2 = 9$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$	$(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$
4. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$

Observera att i regel 1 och 2 ovan måste basen vara densamma för att det ska fungera. På talet $3^4 \cdot 5^2$ kan alltså *inte* reglerna tillämpas eftersom de två potenserna har olika bas (3 respektive 5).

När flera olika räknesätt blandas i samma uppgift har de olika räknesätten olika prioritet. Potenser har högre prioritet än de vanliga fyra räknesätten. Detta innebär alltså att en potens ska beräknas innan övriga operationer utförs.

EXEMPEL 1.18

- a) $3 + 5^2 = 3 + 25 = 28$
- b) $3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75$
- c) $5^{2+3} = 5^{(2+3)} = 5^5 = 3\,125$
- d) $5^2 + 3 = 25 + 3 = 28$

I exempel c) går alltså additionen först – vilket motsäger regeln att upphöjt har högre prioritet än addition. Skälet är att "2 + 3" skrivits med små tecken vilket innebär att det finns en osynlig parentes runt dessa. Samma typ av problem hade vi ju också vid division med långa bråkstreck.



EXEMPEL 1.19

- a) $10^8 \cdot 10^{-5} = 10^{8+(-5)} = 10^{8-5} = 10^3 = 1\,000$
 b) $10^8 / 10^{-5} = 10^{8-(-5)} = 10^{8+5} = 10^{13} = 10\,000\,000\,000\,000$
 c) $10^{-5} / 10^8 = 10^{-5-8} = 10^{-5-8} = 10^{-13} = 0,00000000000001$
 d) $10^{-8} \cdot 10^8 = 10^{-8+8} = 10^0 = 1$
 e) $(2^{-2})^{-2} = 2^{-2(-2)} = 2^{+4} = 16$

I uppgift b) beräknar vi hur många gånger ett litet tal (0,00001) går i ett stort tal (100 000 000). Svaret blir då ett *stort* tal. I uppgift c) däremot delar vi ett litet tal i många delar varvid resultatet blir ett *litet* tal nära noll. I uppgift d) beräknas 10^0 till 1. Detta gäller definitionsmässigt för alla tal; upphöjer man talet till 0 blir resultatet 1, oavsett vilken bas man har.

**ÖVNINGAR**

✍ Skriv som *en* potens.

- | | |
|---------------------------------|--|
| 111 a) $10^3 \cdot 10^5$ | b) $10^4 \cdot 10^{-6}$ |
| c) $10^{-4} / 10^3$ | d) $1 / 10^6$ |
| 112 a) $10^{-2} / 100$ | b) $10^{-4} / 10^4$ |
| c) $5^5 \cdot 5^2 / 5^7$ | d) $(10^{-5} \cdot 10^2) / (10^{-7} \cdot 10^3)$ |
| 113 a) $5^5 / 5^2 \cdot 5^{-2}$ | b) $3^6 / 3^2$ |
| c) $5^3 \cdot 5^{-3}$ | d) $(10^{-4} \cdot 10^{-3}) / (10^3 \cdot 10^4)$ |

1.9 Grundpotensform

Alla decimaltal i vårt talsystem kan delas upp i två delar; en del som innehåller själva siffrorna och en del som beskriver storleksordningen på talet.

37 000 kan t ex skrivas $37 \cdot 10^3$ eller $3,7 \cdot 10^4$ eller $0,37 \cdot 10^5$, bara för att ta några exempel. Om sifferdelen är ett tal mellan 1 och 9,9999... och potensen är en 10-potens så sägs talet vara skrivet i *grundpotensform*. För att skriva 37 000 i grundpotensform ska man alltså skriva $3,7 \cdot 10^4$. Ju fler siffror man använder i sifferdelen desto mer exakt ger talet intryck av att vara; $3,7000 \cdot 10^4$ är alltså fortfarande samma tal, fortfarande i grundpotensform, men mer noggrant angivet.

EXEMPEL 1.20

Skriv 3 450 och 0,00273 i grundpotensform med två decimaler.

* * *

a) $3\,450 = 3,45 \cdot 10^3$

b) $0,00273 = 2,73 \cdot 10^{-3}$



I MS-Excel kan man välja om man vill mata in ett tal som vanligt decimaltal eller i potensform. Istället för att mata in ett tal som 384 294 000 kan man alltså skriva in talet i grundpotensform: $3,84294 \cdot 10^8$. I Excel matas detta in som: =3,84294E8. Siffran efter E:et talar alltså om hur stor exponenten är.

Om man går in under fliken *Tal* i inställningarna för cellen kan man ställa in att resultatet ska presenteras i potensform. Det gör man genom att ställa in talformatet *Vetenskapligt*.

På Casio-räknaren görs motsvarande genom att man trycker på knappen på nedersta raden: $\times 10^{\square}$. På displayen skrivs då i vårt fall: $3,84294 \times 10^8$. Skriver du in talet och trycker [EXE] ser du att det blir ca 384 miljoner.

**EXEMPEL 1.21**

Beräkna med räknaren: $\frac{2 \cdot 10^{-12}}{-8 \cdot 10^{-5}}$

* * *

Casio: $2 \times 10^{(-12)} \div (- 8 \times 10^{(-5)})$ [EXE]

OBS 1: $\times 10^{(\square)}$ fås genom ett tryck på knappen $\times 10^{\square}$

OBS 2: Det tillkommer en parentes runt nämnaren (-8×10^{-5})

Svar: $-2,5 \times 10^{-8}$

Detta svar är alltså i grundpotensform. I decimalform blir det då: - 0,000000025. Ett mycket litet negativt tal.

**ÖVNINGAR**

☞ Skriv som vanliga tal utan tioexponent.

114 a) $3,29 \cdot 10^{-2}$

b) $8 \cdot 8 \cdot 10^{-2}$

c) $5,683 \cdot 10^5$

d) $-400 \cdot 10^{-4}$

- 115 a) $400 \cdot 10^4$ b) $(6 \cdot 10^{-2})(5 \cdot 10^3)$
 c) $3 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^{-1}$ d) $3 \cdot 10^2 + 8,2 \cdot 10^{-1}$

☞ Skriv följande tal i **grundpotensform** avrundat till tre decimaler.

- 116 a) 128 576 c) $0,0047716 \cdot 10^{-2}$
 c) $403,35 \cdot 10^{-3}$ d) 12,9749

- 117 a) $-0,0299952$ b) 50 492
 c) $6 \cdot 10^{-1} \cdot 5 \cdot 10^{-3}$ d) $(60 \cdot 10^5)/(5 \cdot 10^2)$

- 118 a) Tre tusendelar b) Tjugofem hundra delar
 c) En och en halv miljon d) En halv miljard

☞ Beräkna med miniräknare.

- 119 a) $(4^{-1})^{-3} + 4^{-1}$ b) $(4^5)^0$
 c) $(3^{-1})^{-2}$ d) $3^{-1} \cdot 2^{-2}$
- 120 a) $-5^0 + (-5)^2 - (5^{-2})^{-1}$ b) $3^{-1} / 2^{-2}$
 c) $(-2)^3 + (-3)^2 + (-1)^0$ d) $(2^{-1} + 1^{-2}) / (3^3 \cdot 3^{-5})$
- 121 a) $\frac{5^3 \cdot 5^{-4} \cdot 5^5}{5^9 \cdot 5^{-3}}$ b) $\frac{4^3 - 4^2 \cdot 2}{2^{-2} \cdot 2^3}$
 c) $5^1 + 5^0 + 5^{-1} + 5^{-2}$ d) $-(3^{-1} + 2^{-1}) / (2^{-4} \cdot 2^1 \cdot 2^2)$

☞ Beräkna med räknaren. Svara i **grundpotensform** avrundat till tre decimaler.

- 122 a) $1 / 300$ b) $-250\,000 / 1\,200$
 c) $\pi \cdot 4\,000$ d) $1 / (5\pi)$

123 a)
$$\frac{-12,37}{5 \cdot \pi}$$

b)
$$-10,35 - \frac{-12,37}{5,68} + (-8,37) \cdot \frac{2}{3,3}$$

c)
$$\frac{-1,11 \cdot 2,21}{3,18} + \frac{3,37}{3,18 + 3,37}$$

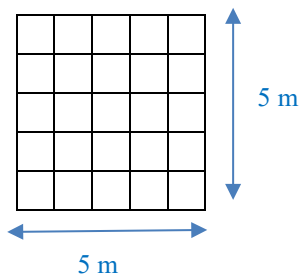
d)
$$\frac{53,8 \left(-1,12 - 2,13 - \frac{3,42}{2,97 + 1,12} \right)}{2,27}$$

124. I Excel får du resultatet: "3,55E-4", vilket tal blir detta i decimalform?

1.10 Fler inbyggda funktioner på räknaren

En matematisk *funktion* kan liknas vid en maskin där man stoppar in "råa" tal i ena änden och får ut bearbetade "förädlade" tal i den andra änden. Ungefär som du stoppar in en stock i ena änden och får ut plankor av en viss typ i den andra.

Ett exempel på funktion är den som beräknar arean av en kvadrat när längden på sidan är känd: $f(x) = x^2$ (läses: "f av x är x i kvadrat").



Figur 1.3 En kvadrat som är $5 \text{ m} \times 5 \text{ m} = 25 \text{ m}^2$. Den stora rutan innehåller ju 25 smårutor som var och en är 1 m^2 . Om sidan istället är $x \text{ m}$ blir arean $f(x)$: $f(x) = x \cdot x = x^2$.

Om vi stoppar in att sidan $x = 5 \text{ m}$ så blir arean: $f(5) = 5^2 = 5 \cdot 5 = 25 \text{ m}^2$, dvs. $f(5) = 25$. Vi byter alltså ut x :et i funktionen, som ju kan stå för vilket tal som helst, mot 5 för att få just arean när sidan är 5 m.

På motsvarande sätt kan vi teckna en funktion g som tvärt om räknar ut sidan på en kvadrat när arean är känd:

$$g(x) = \sqrt{x} \text{ (läses: "g av x är kvadratroten ur x").}$$

Nu betecknar x arean och $g(x)$ sidan. Om arean är $x = 25 \text{ m}^2$ är sidan $g(25)$:

$$g(25) = \sqrt{25} = 5 \quad (\text{vi har bytt ut } x \text{ mot } 25 \text{ och det tal som gånger sig självt blir } 25 \text{ är ju } 5).$$

Vissa vanliga funktioner finns fördefinierade i Excel och har särskilda knappar på räknaren. Det finns alltså t.ex. en funktion för att ta kvadratroten ur ett tal i Excel: ROT() medan motsvarande på Casio-räknaren blir: $\sqrt{\blacksquare}$.

EXEMPEL 1.22

a) $5 - 2 \cdot \sqrt{3} \approx 1,535898385 \approx 1,536$

Skriv i Excel: $= 5 - 2 * \text{ROT} (3)$ [ENTER]

På Casio: $5 - 2 \sqrt{(3)}$ [EXE]

b) $3\sqrt{5 + 2 \cdot 3,35} \approx 10,261579 \approx 10,262$

Observera att rottecknet är långt utdraget och att vi på något sätt måste tala om detta för räknaren. Direkt efter rottecknet kommer det därför en vänsterparentes som talar om var rottecknet ska börja. Vi får själva mata in högerparentesen som visar var den ska sluta.

Skriv i Excel: $= 3 * \text{ROT} (5 + 2 * 3,35)$ [ENTER]

På Casio: $3\sqrt{(5 + 2 \times 3.35)}$ [EXE]

c) $\sqrt{-4} = \text{Lösning saknas!}$

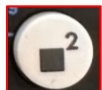
Excel svarar: "OGILTIGT!"

Räknaren svarar Math ERROR, tryck [AC] för att nollställa.

Det går inte i den vanliga matematiken att ta roten ur negativa tal eftersom produkten av två likadana tal (med samma tecken) aldrig kan bli negativ.

□

För att upphöja ett tal till ett annat, dvs. för att beräkna en potens, används tecknet ^ i Excel och på räknaren knappen upphöjt till vilket ger just tecknet ^ och (om du ställt in enligt anvisningarna) samt en vänsterparentes på skärmen: ^(

Eftersom det är vanligt att upphöja till två finns också en särskild knapp på Casioräknaren för det. Ska du t.ex. ta 25² kan du alltså antingen trycka 25^(2) eller 25 och knappen . Testa så ser du att båda varianterna ger svaret 625.

Som nämnts tidigare har potenser högre prioritet än de fyra räknesätten ($2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 27 = 54$ eftersom upphöjt går före gånger och är inte det-samma som $6^3 = 216$). Denna regel finns inbyggd i moderna räknare, på samma sätt som den klarar att hantera gånger före plus. Matar vi in: $2 \times 3 \wedge (3)$ får vi alltså helt riktigt resultatet 54.

EXEMPEL 1.23

a) $5^{2,25} + 3 = 40,3837... \approx 40,38$

Excel: $= 5 \wedge 2,25 + 3$ [ENTER]

Casio: $5 \wedge (2.25) + 3$ [EXE]

b) $3 \cdot 5^{2,25} = 112,151... \approx 112,15$

Excel: $= 3 * 5 \wedge 2,25$ [ENTER]

Casio: $3 \times 5 \wedge (2,25)$ [EXE]

c) $5^{3 \cdot 2,25} = 52245,3363... \approx 52\,245$

I det här fallet är både 3 och 2,25 skrivet med *små* siffror vilket innebär att 5 ska upphöjas till produkten 6,75. Vi måste alltså utföra multiplikationen först och därmed upphäva den vanliga prioriteringsordningen genom att sätta en parentes runt $(3 \cdot 2,25)$.

Excel: $= 5 \wedge (3 * 2,25)$ [ENTER]

Casio: $5 \wedge (3 \times 2,25)$ [EXE]

Utan parentes hade istället felaktigt talet $5^3 \cdot 2,25$ med resultatet 281,25 beräknats.

d) $-4^2 = ?$

Matar man in detta på räknaren blir resultatet helt riktigt -16. Upphöjt har ju högre prioritet än subtraktion. I Excel blir däremot resultatet konstigt nog 16. Egentligen räknar alltså Excel ut $(-4)^2$ medan det logiska skulle vara resultatet -16. Ta dock för vana att använda parentes så det syns om minustecknet ska kvardras eller ej. Slår du på räknaren $(-4)^2$ får du +16 och skriver du i Excel $-(4^2)$ får du -16.



ÖVNINGAR

☞ Beräkna med räknare. Svara avrundat till tre decimaler.

125 a) $\sqrt{30}$

b) $\sqrt{8 \cdot 4}$

c) $\sqrt{8 \cdot 4 - 17}$

d) $2 \cdot \sqrt{2 \cdot 5 - 3}$

126 a) $(4,5 - 2^3) \cdot 3,3$

b) $(4,5 - 2)^3 \cdot 3,3$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

d) $\sqrt{8} \cdot (2^{3,2} - 4)$

127 a) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{4}}$

b) $\left(\frac{6}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{12}}\right)^3$

c) $(\sqrt{8})^{(2,2 \cdot 1,3 - 2,75)}$

d) $\frac{1000}{(5,5 \cdot 3)^2 - 12}$

☞ Beräkna med Excel/räknare. Svara i grundpotensform med tre decimaler.

128 a) $3,571 \cdot 10^3 - 1,212 \cdot 10^2$

b) $3,579 \cdot 10^3 \cdot 1,222 \cdot 10^{-2}$

c) $3,571 \cdot 10^{-3} - 1,222 \cdot 10^{-2}$

d) $3,571 \cdot 10^{-3} / (-1,222 \cdot 10^2)$

129 a) $\frac{6,5 \cdot 10^8 \cdot 2,1 \cdot 10^6}{1,18 \cdot 10^{-8}}$

b) $\frac{-2,5 \cdot 10^{-4} \cdot 0,032}{2,23 \cdot 10^1 \cdot 6,37 \cdot 10^{-2}}$

c) $\sqrt{3,52 \cdot 10^3 \cdot 1,52 \cdot 10^{-2}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{1,99 \cdot 10^{-3}}}$

130 a) $\frac{3,35 \cdot 10^{-12}}{5,22 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{12}}$

b) $\frac{1,22 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} \cdot (3 \cdot 10^3 + 21 \cdot 10^2)}{8,33 \cdot 10^{-3}}$

c) $\frac{6,15 \cdot 86,5 \cdot 0,425}{27,6 \cdot 1,32 \cdot 3,24}$

d) $\frac{0,148 \cdot 47,6 + 8,26}{98,5 \cdot 2,48 \cdot 214}$
