

2. MATEMATISKA FORMLER

Vi har tidigare varit inne på att när vi arbetar med formler så kan en och samma formel skrivas om på flera olika sätt. Ju duktigare man är i matematik desto fler olika sätt att säga samma sak klarar man av. I det här avsnittet ska vi med "torrsim" öva på att hantera uttryck av olika slag. Formlerna här är alltså inga riktiga skogsformler, utan precis samma matematik du träffat på flera gånger förut i skolan.

2.1 Uttryck

Det som står på högersidan i en funktion brukar ibland kallas för *uttryck*. Vi har tidigare haft exemplet med höjdkurvan där:

$$y = 9 + 0,4 x$$

Här är alltså " $9 + 0,4 x$ " ett uttryck. Vi har också varit inne på att detta uttryck, utan att förändra sitt värde, kan skrivas:

$$y = 0,4 x + 9$$

Men det finns betydligt fler sätt att skriva uttrycket. T.ex.:

$$y = 0,4 (22,5 + x)$$

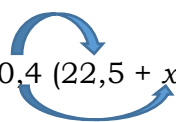
Om diametern är 10 cm får vi ju med den sista formeln:

$$y = 0,4 (22,5 + 10) \quad \text{Parentesen ska tas först:}$$

$$y = 0,4 \cdot 32,5$$

$$y = 13$$

I det här fallet var nog den ursprungliga formeln lättast att räkna med. Det betyder att vi måste kunna skriva om formeln vi hade sist på det sättet som vi hade först. Det kan vi också. När vi gör det måste siffran framför parentesen multipliceras med var och en av termerna i parentesen.

$$y = 0,4 (22,5 + x)$$


$$y = 0,4 \cdot 22,5 + 0,4 \cdot x$$

$$y = 9 + 0,4 x$$

Vi kan räkna ut första termen:

Vilket vi hade tidigare.

Det är viktigt att ta med tecknet framför respektive term vid multiplikationen. Om det istället stått:

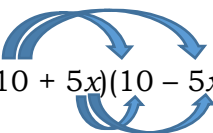
$$y = -0,4(22,5 - x) \quad \text{så hade resultatet istället blivit:}$$

$$y = -0,4 \cdot (+22,5) - 0,4 \cdot (-x)$$

$$y = -9 + 0,4x$$

Observera att detta inte alls är samma funktion som vi hade nyss, eftersom vi har ett minustecken på 9:an. Anledningen till att denna blir negativ här är att vi multiplicerar två faktorer med *olika* tecken, och då blir resultatet *negativt*. I sista termen multiplicerar vi två negativa faktorer ”-0,4” och ”-x” och då tar minustecknen ut varandra och produkten blir positiv. *Samma* tecken på faktorerna ger alltså en *positivt* resultat.

Man gör på samma sätt när man ska multiplicera två parenteser med varandra. T.ex.:


$$y = (10 + 5x)(10 - 5x)$$

Vi får alltså (tänk på att ta med tecknet framför varje term):

$$"+10 \cdot +10" = +100$$

$$"+10 \cdot -5x" = -10 \cdot 5 \cdot x = -50x$$

$$"+5x \cdot +10" = 5 \cdot 10 \cdot x = +50x$$

$$"+5x \cdot -5x" = +5 \cdot -5 \cdot x \cdot x = -25x^2$$

Sammanfattar vi det hela får vi alltså

$$y = +100 - 50x + 50x - 25x^2$$

Här tar $-50x$ och $+50x$ ut varandra så vi får formeln:

$$y = 100 - 25x^2$$

Vilket vi sedan tidigare vet också kan skrivas:

$$y = -25x^2 + 100$$

EXEMPEL 2.1

Förenkla uttrycket $x + 2 - (12 - 3x)$.

* * *

Egentligen betyder detta:

$$x + 2 - 1 \cdot (12 - 3x)$$

Vi kan alltså multiplicera in "-1" och samtidigt ta bort parenteserna, "-1 · +12 = -12" och "-1 · -3x = + 3x":

$$x + 2 - 12 + 3x$$

Vi har fyra termer. Lägg ihop x -termerna för sig och konstanterna för sig.

Svar: $4x - 10$



EXEMPEL 2.2

Förenkla: $2 - (x + 2) + (x - 4)(x + 2) - 2(1 - x)$

* * *

Här finns fyra termer "2", " $-(x + 2)$ ", " $(x - 4)(x + 2)$ " och " $-2(1 - x)$ ". Ta och förenkla varje term för sig; 2 är klar, $-(x + 2)$ blir $-x - 2$ osv.

$$2 - x - 2 + (x^2 + 2x - 4x - 8) - 2 + 2x$$

$$2 - x - 2 + x^2 + 2x - 4x - 8 - 2 + 2x$$

Lägg ihop siffrorna för sig, x -termerna för sig och x^2 för sig:

$$-10 - x + x^2$$

Svar: $x^2 - x - 10$ även $-10 - x + x^2$ och t.ex. $-10 + x^2 - x$ är riktiga svar.



EXEMPEL 2.3

Förenkla: $(x - 2)^2 - (x - 2)(3 - x)$

* * *

$(x - 2)^2$ innebär att parenteserna ska multipliceras med sig själv, dvs. $(x - 2)(x - 2)$. Vi får då:

$$(x - 2)(x - 2) - (x - 2)(3 - x)$$

$$(x^2 - 2x - 2x + 4) - (3x - x^2 - 6 + 2x)$$

Minustecknet före andra parentesen gör att vi måste byta tecken på alla termer i parentesens (samma som att multiplicera varje term med "-1"):

$$x^2 - 2x - 2x + 4 - 3x + x^2 + 6 - 2x$$

$$2x^2 - 9x + 10$$

□

Kom ihåg att poängen med att förenkla ett uttryck är att det ska vara lika mycket värt före och efter förenklingen. Stoppar vi t.ex. in $x = 10$ i formeln före och efter förenkling ska vi få samma tal. Om vi testar på uttrycket i exempel 5 får vi:

$$(x - 2)^2 - (x - 2)(3 - x) = (10 - 2)^2 - (10 - 2)(3 - 10) = 8^2 - (8 \cdot -7) =$$

$$64 - (-56) = 64 + 56 = 120$$

Medan vi i det förenklade uttrycket får:

$$2x^2 - 9x + 10 = 2 \cdot 10^2 - 9 \cdot 10 + 10 = 2 \cdot 100 - 90 + 10 = 200 - 90 + 10 = 120.$$

Helt riktigt fick vi samma värde före och efter förenklingen.

ÖVNINGAR

☞ Förenkla följande uttryck genom att ta bort parenteserna

201 a) $3x - 8x$

b) $3x - 2y - 8x + 5y$

c) $x - (x - y)$

d) $8 - 3x + (x - 8) - (-2x)$

202 a) $(x + 3) - (3 + x)$

b) $2x - (2x + 3) - 4x$

c) $5x - (3x + 2y) - (x - 4y) - 5x$

d) $9x - (5x + 3y) - (2y - x) - (-3)$

203 a) $(x - x^2) - (x^2 - x)$

b) $5xy - (7xy + 3y) - (3x - 3y) - (x - xy)$

c) $-xy + yx + xy + yx - 5(x - xy)$

d) $(x - 1) - (x - 1) - (x - 1) - 1$

204 a) $3x - (-4x + 3xy) - (x - 2y) - x$

b) $(x + x^2) + x^3 - (x - x^2) - x^2$

c) $(x + x^2 + x^3) + (x + x^2 + x^3)$

d) $x^3 - (x^3 + xy) - 2xy - (x - xy)$

-
- | | | |
|------------|---|--|
| 205 | a) $5(3 + x)$ | b) $x(7 + x)$ |
| | c) $5x(3 + x)$ | d) $5x(3 - x)$ |
| 206 | a) $13x - 5x(3 - 2x)$ | b) $3(x + 2) - x(x - 3)$ |
| | c) $x^2 - x(1 - x) - (1 - x)$ | d) $x(x + 2) - x(x - 2)$ |
| 207 | a) $t(2 + t) - 3(t - 2)$ | b) $t(3t - 6) - 2t(-t)$ |
| | c) $(t + 2)^2$ | d) $-4(t - 1)(t - 2)$ |
| 208 | a) $(t + 3)^2 - (t - 3)^2$ | b) $(t + 2)(t - 3)$ |
| | c) $(t + 2)(t - 2) + 4$ | d) $-4(1 - t)(t - 2)$ |
| 209 | a) $(x + 1)(x - 3) + (x - 2)^2$ | b) $(x - 1)(x + 3) - x(x - 2)$ |
| | c) $(x - 1) - (x - 2) - (x - 3)$ | d) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ |
| 210 | a) $4(x - 2) - 5(3 + x)$ | b) $-5(x + 3 - y) - x(y - 5)$ |
| | c) $x(xy)(x - y)$ | d) $(7 - x)^2 + (5 - x)(3 - 2x) - 27$ |
| 211 | a) $(x - 6)^2 + (6x + 1)^2 - 37$ | b) $(3x - 4)^2 - (3x + 1)(3x - 1) - 12$ |
| | c) $3 - (4x - 5)^2 + 4x(2 - 4x)$ | d) $2x^2 - 3x(y + x) + (x - 1)^2$ |
-

2.2 Enhetsbyten

Matematiken uppstod ur diverse mätningar. Man mätte sträckor, areor och volymer. De enheter som användes för mätningarna varierade dock från plats till plats. Det fanns exempel på sådana oprecisa längdmått som "ett kobröl" (det avstånd på vilket man kunde höra en ko) och det kanske ännu mer udda "en tekopp" (sträckan man hinner gå med en kopp kokhett te innan det kommit ner till en drickbar temperatur) – de engelsmännen, de engelsmännen...

Numera är enheterna något snär standardiserade i det så kallade SI-systemet. SI betyder *Système International d'Unités*, alltså en internationell standard för måttenheter. Trots standardiseringen är det fortfarande väldigt lätt att göra fel vid enhetsbyten, framförallt vid byte av enheter för areor och volymer. Särskilt svårt är det dock egentligen inte, om man bara tar det lugnt och metodiskt. Tack vare standardiseringen handlar det mest om att flytta decimalkommat åt rätt håll.

EXEMPEL 2.4

a) Förvandla 0,015 meter till mm:

Det går 1 000 mm på en meter (3 nollor). Flytta därför decimalkommat tre steg åt HÖGER.

Svar: 0,015 m = 0015,0 mm = 15 mm



b) Förvandla 23 000 mm² till dm²:

Det går 100 mm på en dm. Då går det $100 \cdot 100 = 10\,000$ mm² på en dm² (4 nollor). Flytta därför decimalkommat fyra steg åt VÄNSTER

Svar: 23 000,0 mm² = 2,30000 dm² = 2,3 dm²



c) Förvandla 0,06 dm³ till cm³:

Det går 10 cm på en dm. Då går det $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$ cm³ på en dm³ (3 nollor). Flytta därför decimalkommat tre steg åt HÖGER.

Svar: 0,060 dm³ = 0060,00 cm³ = 60 cm³



ÖVNINGAR

☞ Förvandla:

212 a) 1 887 550 cm² till m²

b) 0,000150 m³ till cm³

c) 750 mm³ till dm³

d) 168 mm² till dm²

213 a) 1 550 cm² till m²

b) 1 287 000 mm till mil

c) 515 dm³ till m³

d) 0,015 m² till cm²

214 a) 35 dm³ till m³

b) 1 ha till mm²
(1 ha = kvadrat 100 m · 100 m)

c) 453 km² till ha

d) 500 m² till ha

215 a) 800 cm² till dm²

b) 78 dl till m³
(10 dl = 1 liter = 1 dm³)

c) 75 liter till cm³

d) 15,5 dm till mm

- 216 a) 10 h till sekunder b) 0,25 h till minuter
c) 1 h och 18 minuter till h d) 3 h 12 minuter och 45 sekunder till h
-

2.3 Omkrets och areaberäkning

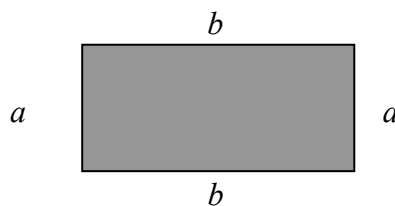
I detta och det följande avsnittet ska vi repetera de vanligaste formlerna för att beräkna areor och volymer som finns i matematiken. Dessa är väldigt väsentliga för de "areella" gröna näringarna som skogs- och jordbruk. Utifrån dessa formler ska vi sedan skapa modeller för att bl.a. beräkna trädens volym. I vanliga matematikkurser brukar detta avsnitt kallas för *geometri*. Ordet geometri stammar från grekiskan och betyder fritt översatt "jordmätning". Jordmätning är något vi i lantbruket fortfarande håller på en hel del med, t.ex. när vi beräknar beståndens areal. Idag används dock ofta GIS-program för att hantera kartor (s.k. geografiska informationssystem, GIS).

Målet är att du ska lära dig de vanligaste formlerna utantill och att du ska ha tydliga inre mentala bilder av vad t.ex. 1 mm^2 , 1 ha , 1 dm^3 , 1 m^3 , står för.

Hur omkrets och area beräknas för nedanstående figurer bör du kunna utantill.

2.3.1 Rektangel och kvadrat

Rektangeln har fyra sidor som parvis är parallella. I varje hörn av rektangeln har vi en rät vinkel (90°). *Omkretsen* får vi genom att summera längden av alla fyra sidorna. Om vi uttrycker detta med formler får vi för rektangeln i figuren nedan:



$$\text{Rektangelns omkrets} = a + b + a + b = 2a + 2b = 2(a + b)$$

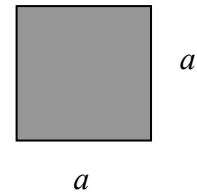
För att beräkna *arean* multiplicerar vi de två sidorna med varandra.

$$\text{Rektangelns area} = a \cdot b$$

Ett specialfall av rektangeln som vi tittat på i studieavsnitt 1 är kvadraten. För kvadraten är alla fyra sidorna lika långa.

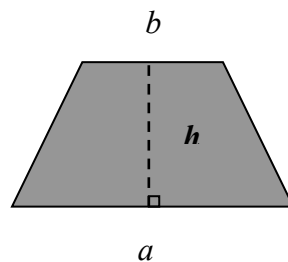
Kvadratens omkrets = $a + a + a + a = 4a$

Kvadratens area = $a \cdot a = a^2$.



2.3.2 Parallelltrapets

Om du ser en virkestrave från sidan kan den – något förenklat – se ut som en parallelltrapets. I en parallelltrapets är två av sidorna parallella. I bilden nedan är det a och b som är det. Man behöver då känna även känna höjden, alltså det vinkelräta avståndet, h , mellan de parallella sidorna för att kunna räkna ut arean.



Parallelltrapetsens area = $h \cdot \frac{(a + b)}{2}$

Att formeln för arean blir som den blir kan förklaras av att man först beräknar medellängden på de två sidorna a och b (man får ju medelvärdet när man lägger ihop dem och delar med två) och därefter multiplicerar medellängden med figurens höjd, h .

2.3.3 Triangel

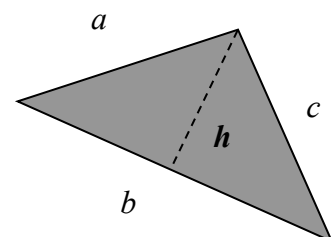
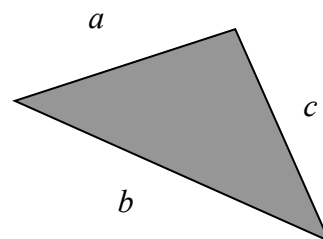
Det finns många typer av trianglar. De vanligaste typerna är rätvinkliga, liksidiga och likbenta. Oavsett hur triangeln ser ut kommer omkretsen alltid att vara summan av de tre sidorna.

Triangelns omkrets = $a + b + c$

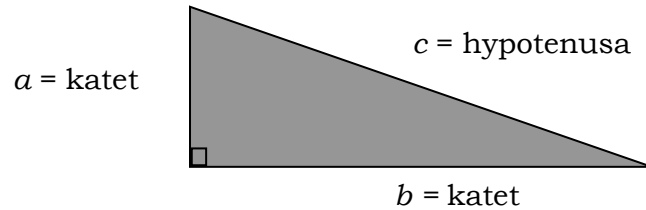
Arean kommer också alltid att kunna beräknas med följande formel:

Triangelns area = $b \cdot h / 2$

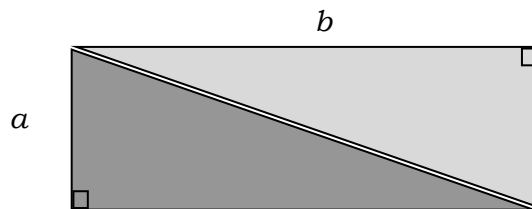
där h är höjden dragen vinkelrätt mot sidan b , triangelns bas.



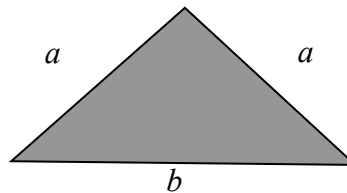
Figuren nedan visar en *rätvinklig* triangel. Här bildar två av sidorna, de så kallade *kateterna*, en rät vinkel mot varandra. Att vinkeln är rät (90°) brukar markeras med en liten fyrkant i hörnet där sidorna möts. I figuren nedan bildar alltså a och b en rät vinkel mot varandra och kallas för kateter medan sidan c kallas för *hypotenusan*.



För att få arean i en rätvinklig triangel multiplicerar vi alltså kateterna med varandra och dividerar resultatet med två. Den rätvinkliga triangelns area är ju precis hälften så stor som arean för en rektangel med sidorna a och b .



I en *likbent* triangel är två av sidorna lika långa.



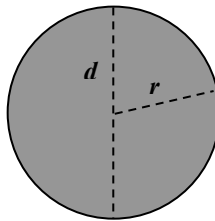
I en *liksidig* triangel är *alla* tre sidorna lika långa.

2.3.4 Cirkel

Cirkeln är mycket viktig i skogsbruket då den dels används för att beräkna ett träds *grundyta*, men även eftersom det ofta läggs ut cirkulära provytor i skogen. De antika grekerna, som till stora delar uppfunnit geometriens matematik, hade stora problem med cirkeln. De var vana vid att räkna bråkräkning och trodde därför länge att det skulle gå att hitta ett bråktal som multiplicerat med diametern gav cirkelns omkrets. Lösningen på problemet – talet π – kan dock inte uttryckas som en division mellan två tal. Som nämnts tidigare är π ett irrationellt tal och dess decimalutveckling fortsätter i all oändlighet utan att upprepa sig.

$$\pi \approx 3,14159265\dots$$

Avståndet genom mittpunkten som delar cirkeln i två lika stora delar kallas för cirkelns *diameter*, d . Tar man halva diametern får man cirkelns *radie*, r . Denna är alltså avståndet från medelpunkten ut till kanten på cirkeln.



För en cirkel med diameter d och radie r gäller:

$$\text{Cirkelns omkrets} = \pi \cdot d$$

$$\text{Cirkelns area} = \pi \cdot r^2$$

I skogen räknar vi ofta med grundytan, dvs. den genomskärningsyta som en trädstam har i brösthöjd. Ofta utgår man då från att denna yta är formad som en cirkel. När vi med klave mäter trädets diameter kan det vara lättare att uttrycka formeln för arean som:

$$\text{Cirkelns area} = \pi \cdot d^2 / 4$$

Att det blir så kan vi lätt visa. Eftersom $r = d/2$ kan vi stoppa in $d/2$ istället för r i formeln:

$$\text{Cirkelns area} = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} = \pi \frac{d^2}{4}$$

EXEMPEL 2.4

Du ska lägga ut en kvadratisk provyta i en skog som ska ha arean 100 m^2 . Hur långa ska sidorna vara?

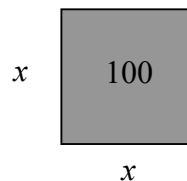
* * *

Eftersom vi inte vet sidornas längd kallar vi denna sträcka x meter. Eftersom alla sidorna är lika långa i en kvadrat blir alla sidorna x meter långa. För att få arean multiplicerar vi:

$$x \cdot x = 100$$

Ett tal gånger sig självt sägs vara talet i kvadrat (t.ex. $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$). Här har vi $x \cdot x = x^2$. Vi kan alltså skriva ekvationen:

$$x^2 = 100$$



x är då kvadratroten ($\sqrt{\quad}$) ur 100:

$$x = \sqrt{100}$$

$$x = 10$$

Kvadratroten ur hundra är ju 10 eftersom $10 \cdot 10$ är just hundra. Man kan säga att kvadratroten ur något är den inversa funktionen (motsatsfunktionen) till att ta något i kvadrat.

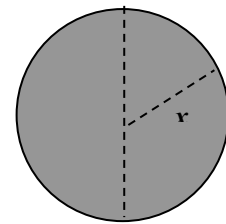


EXEMPEL 2.5

Du ska lägga ut en cirkulärt formad provyta i en skog som ska ha arean 48 m^2 . Hur lång ska radien vara? Använd miniräknarens inbyggda funktion för att få fram π med många decimaler ([SHIFT] + 7).

* * *

Här är det radien som är okänd och därför kallas för x . Enligt formeln för cirkelns area får vi då ekvationen:



$$\pi \cdot x^2 = 48$$

För att få x^2 ensamt på vänster sida om likamedtecknet i ekvationen måste vi dividera med π på båda sidor. Gör vi det kan vi ju förkorta bort π på vänster sida.

$$x^2 = 48 / \pi$$

$$x^2 \approx 15,278875$$

För att få ut vad x är måste vi då ta kvadratroten på båda sidor. Tar vi kvadratroten ur x^2 för vi ju bara x på vänster sida i ekvationen.

$$x = \sqrt{15,278875}$$

Har du 15,2788... på skärmen kan du slå [$\sqrt{\blacksquare}$] och trycka på knappen [Ans]. Räknaren kommer då att beräkna kvadratroten ur det senaste svaret räknaren fått fram.

$$x \approx 3,91 \text{ m}$$

Svar: Cirkelns radie ska vara 3,91 meter för att dess area ska vara 48 m^2 .



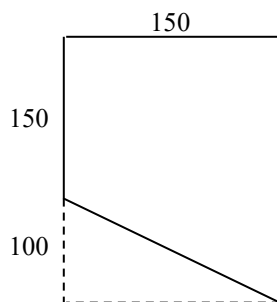
ÖVNINGAR

☞ Beräkna med miniräknare

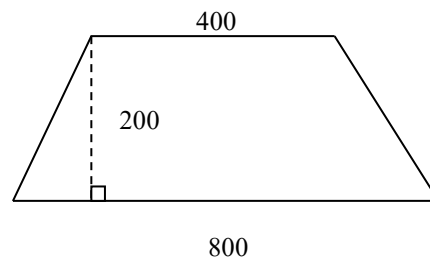
- 217 a) Arian av en rätvinklig triangel med kateterna 4 och 5 meter. Svara i m^2 .
 b) Arian av ett parallelogram med höjden 4 meter och basen 8 meter. Svara i m^2 .
 c) Arian av en cirkel med diameter 10 meter. Svara i ha.
 d) Omkretsen av en trädstam vars diameter där är 33 cm. Svara i meter (2 dec).

218. Bestäm arian av nedanstående områden. Svara i hektar avrundat till en decimal. Figuren är *inte* skalenliga.

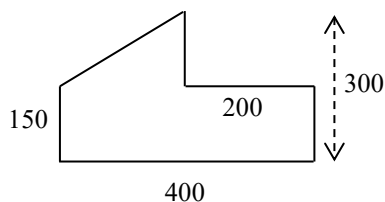
a) [Enhet: m]



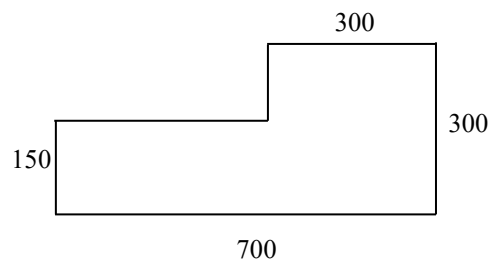
b) [Enhet: m]



c) [Enhet: m]



d) [Enhet: m]



219. Man har klavat tre träd i brösthöjd med följande resultat. Beräkna arian för genomskärningsytan i brösthöjd (grundytan) för vart och ett av träden. Utgå från att ytan är cirkulär. Svara i enheten dm^2 avrundat till två decimaler.

a) 10 cm b) 20 cm c) 40 cm

220. Uppskatta grundyta (genomskärningsyta i brösthöjd), dels *på* och dels *under* bark, för en tall med diameter 10 cm i brösthöjd och enkel barktjocklek 5 mm. Antag i beräkningen att ytan är cirkulär. Hur många procent av grundytan på bark utgörs av barken?

221. Vid en cirkelyteinventering lades fem provtytor med radien 10 meter ut i ett bestånd som var tre ha stort. Hur många procent av arealen inventerades? Svara i procent med en decimal.

222. Ett rektangelformat område är inhängnat med staket. Staketets sammanlagda längd är 58 meter och de båda korta sidorna i rektangeln är 4 meter.
- a) Vilken area har rektangeln? Svara i hektar med två decimaler.
 - b) Om det står 12 stammar på ytan, hur många stammar finns då per hektar?
223. På en cirkelformad provyta med radie 10 meter står 6 träd, alla med brösthöjdsdiameter på 20 cm. Vilken grundyta i m^2/ha svarar detta mot?
224. Du klavar ett träd och konstaterar att diametern idag är 32 cm på bark. Den enkla barktjockleken mäter du upp till 10 mm. Antag att du tidigare, för flera år sedan, klavat trädet och att det då var 22 cm på bark. Antag vidare att barktjockleken vid förra mättillfället var lika stor som den är idag.
- a) Hur många cm^2 har grundytan *under bark* ökat med under perioden?
 - b) Hur många procent har grundytan *under bark* ökat med under perioden?
225. Du ska lägga ut en provyta som ska ha arean 900 m^2 .
- a) Antag att ytan ska vara kvadratisk. Beteckna den okända sidan med x . Vilken ekvation kan du ställa upp?
 - b) Lös ekvationen. Hur lång blir sidan i a)?
226. Du ska lägga ut en provyta som ska ha arean 75 m^2 .
- a) Antag att ytan ska vara cirkulär. Beteckna cirkelns radie med x . Vilken ekvation kan du ställa upp?
 - b) Lös ekvationen. Hur lång blir radien i a)? Svara i meter med två decimaler.
227. I en planteringsinstruktion står det att man ska plantera 2 500 plantor per hektar.
- a) Beräkna hur många m^2 varje planta får.
 - b) Antag att varje planta får ett kvadratisk område av samma storlek som i a) tilldelat sig. Hur många meter kommer det då att vara mellan plantorna?
 - c) Antag att man ska plantera x plantor per hektar. Skriv en formel innehållande x och som beräknar $y =$ avståndet mellan plantorna. Om man stoppar in $x = 2\,500$ i formeln ska man alltså få svaret i uppgift b).
-

2.4 Volymberäkning

När man beräknar volymer brukar man ofta ha nytta av formlerna för area. Tänk dig en stock som inte har någon som helst avsmalning, alltså en stock som är exakt formad som en cylinder. Volymen för hela stocken får du då genom att multiplicera ytan i stockändan med stockens längd.

$$\text{basytan} \cdot \text{höjden} = \text{volymen}$$

Om du beräknar ytan i dm^2 och längden i dm så kommer volymen att få enheten:

$$\text{dm}^2 \cdot \text{dm} = \text{dm}^3$$

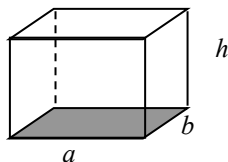
Tänk dig på motsvarande sätt en bit ost, formad såsom den brukar vara när du köper den i affären. Om du kan räkna ut arean i botten på osten i cm^2 och sedan multiplicerar denna area med ostens höjd i cm så kommer du att få volymen i cm^3 .

Både i fallet med stocken och i fallet med osten kan du dela upp kropparna i tunna lager (/tvärsnitt) med exakt samma area hela tiden. Om det går blir formeln för volymen som angavs ovan.

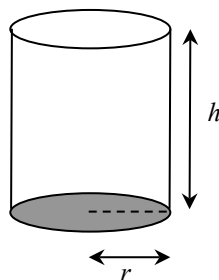
Om man däremot har en kon (som ju är strutformad) så kommer tvärsnitten att få olika areor, beroende på hur långt från botten man kommer. För en kon kan alltså inte ovanstående formel fungera. Matematiker har visat att konens volym är precis en tredjedel av cylinderns.

Följande formler bör du kunna utantill:

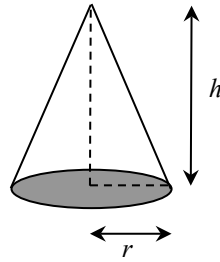
Rätblockets volym = Basyta $\cdot$ höjd = $a \cdot b \cdot h$



Cylinderns volym = Basyta $\cdot$ höjd = $\pi \cdot r^2 \cdot h$



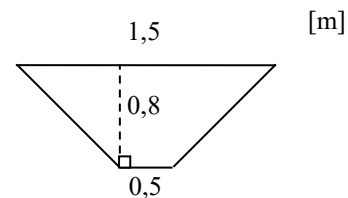
$$\text{Konens volym} = \frac{1}{3} \cdot \text{Cylinders volym} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$



ÖVNINGAR

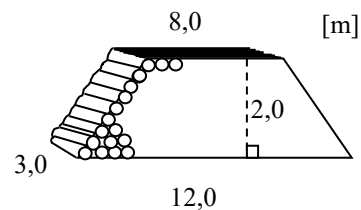
☞ Beräkna med miniräknare

228. Ett dike har en genomskärningsyta som ser ut som på bilden. Dikets längd är 200 meter. Uppskatta hur mycket jorden vägde som behövde schaktas bort. Räkna med att 1 m^3 jord väger 1,5 ton.



229. Uppskatta vikten av en 5 meter lång bräda som är 2 cm tjock 12 cm bred. Räkna med att 1 dm^3 väger 0,8 kg.

230. Uppskatta vikten av traven på bilden. Räkna med att varje travad kubikmeter motsvarar 600 kg. Svara avrundat till hela ton.



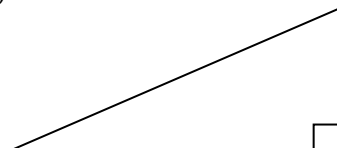
231. En trädstam har en diameter nere vid roten på 20 cm och en höjd på 18 meter. Antag att nedre halvan av stammen är formad som en cylinder och den övre halvan som en kon.
- Vilken volym har trädstammen uttryckt i m^3 ?
 - Beräkna *formtalet* dvs. hur många procent av en tänkt cylinder med diameter 20 cm och höjd 18 meter som stammen kommer att utgöra.

2.5 Likformig avbildning

Centralt för alla GIS (geografiska informationssystem) är begreppet *likformig avbildning*. Alla kartor och ritningar är exempel på likformiga avbildningar. Med detta menas att relationen hela tiden är densamma om man

tar en sträcka i bilden och dividerar med motsvarande sträcka i verkligheten (eller tvärt om). Vidare innebär det att alla *vinklar* som sidorna har i bilden och har i verkligheten är desamma. Om vi har en triangel och antingen förstörar eller förminskar den så kommer detta inte att påverka vinklarnas storlek – de blir desamma.

På samma sätt som en sträcka kan uttryckas i olika enheter (cm, mm, tum etc.) så kan en vinkel också uttryckas på lite olika sätt. Det vanligaste sättet är att man utgår från att ett varv är precis 360° . Ett kvarts varv, en så kallad rät vinkel, är då $360 / 4 = 90^\circ$. På ritningar brukar en rät vinkel markeras med en liten fyrkant (se Figur 2.1 med fyrkanten nere till höger i bild).



Figur 2.1. En triangel där nedre högra hörnet har en rät vinkel (90°).

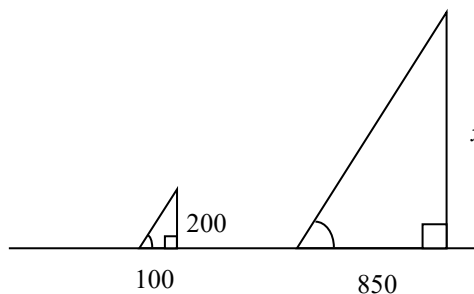
Om man definierar ett varv som 360° så gäller att summan av vinklarna i en fyrhörning alltid är just 360° . Summan av vinklarna i en triangel är då alltid 180° . I vissa sammanhang (t.ex. på kompassen) definierar man dock ett varv som 400 grader – eller gon – och då blir en rät vinkel 100 gon.

EXEMPEL 2.6

Vid ett visst ögonblick en solig dag bildar ett träd en skugga som är 8,5 meter lång. Samtidigt får en person som har en längd av 200 cm en skugga som är precis 100 cm. Hur högt är trädet?

* * *

Här har vi ett exempel på likformig avbildning. Vinklarna i de två trianglarna kommer att bli lika stora. Vidare kommer relationerna mellan sidorna att bli desamma.



Följande ekvation kan därmed ställas upp (sidan x i den stora triangeln ska förhålla sig till 200 i den lilla på samma sätt som sidan 850 förhåller sig till 100):

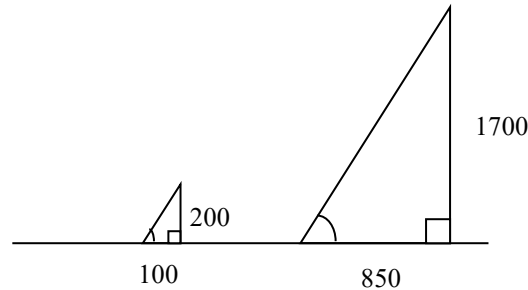
$$\begin{aligned}\frac{x}{200} &= \frac{850}{100} \\ x &= 200 \cdot \frac{850}{100} \\ x &= 2 \cdot 850 \\ x &= 1700\end{aligned}$$

Svar: Trädet är 17,0 m högt.



2.6 Bestämning av sträcka med tangens

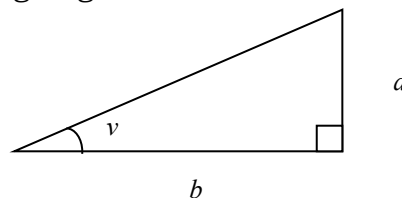
När vi löste Exempel 2.6 ovan fick vi figuren nedan (Figur 2.2). Vi vet att de två trianglarna är likformiga och därför har samma storlek på sina vinklar. T.ex. kommer vinkeln längst ned till vänster i trianglarna att vara lika stor. Det är lätt att inse att denna vinkels storlek helt och hållet bestäms av relationen mellan de två kateterna i triangeln (kateterna är de två sidor som tillsammans bildar en rät vinkel).



Figur 2.2 Två trianglar som har lika stor vinkel i nedre vänstra hörnet eftersom relationen mellan kateterna för dem är densamma ($850/100 = 8,5$ och $1700/200 = 8,5$).

Beräknar vi relationen i den vänstra triangeln får vi:
 $200 / 100 = 2,0$ och på motsvarande vis i den högra:
 $1700 / 850 = 2,0$. Det är just detta samband som utnyttjas i funktionen TAN (*tangens*). I alla rätvinkliga trianglar gäller att:

$$\text{TAN}(v) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Motstående katet}}{\text{Närliggande katet}}$$

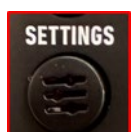


Figur 2.3 Definitionen av tangens för en vinkel i en rätvinklig (90°) triangel. Sidan a står mitt emot vinkeln v och sidan b är mer närliggande v .

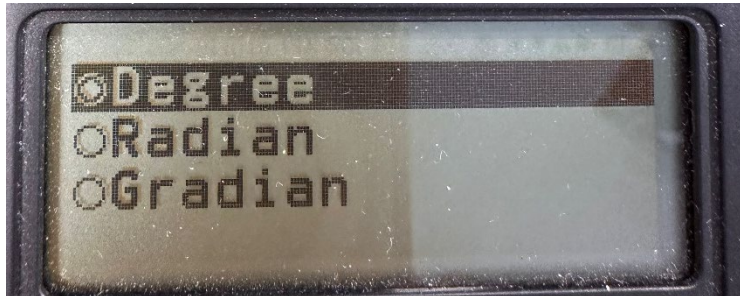
I praktiken innebär detta att om man känner längden på en sida i triangeln och kan mäta upp hur stor vinkeln är, så kan längden på de övriga sidorna i triangeln beräknas. Höjdmätaren som används i skogsbruket utnyttjar detta och är egentligen inget annat än en vinkelmätare. Känner vi i Figur 2.3 ovan vinkeln v och avståndet till trädet, sträckan b , kan trädets höjd, a , bestämmas.

Först måste man dock bestämma vilken typ av grader som man ska använda. Vi väljer här i kursen den vanliga typen som innebär 360° för ett helt varv och 90° för en rät vinkel. Detta måste också talas om för Casio-räknaren. Det görs genom att trycka så här:

1. Slå på räknaren och tryck på knappen [Settings]. En meny med fyra alternativ visas och du väljer det första alternativet: "Calc settings" med [OK].



2. I nästa meny väljer du på motsvarande vis andra alternativet "Angle Unit" genom att trycka nedåtpil och [OK].
3. I den meny som då visas här nedan väljer du det första slutligen alternativet "Degree" genom att trycka på [OK].



4. Backa slutligen ur menyn genom att trycka på knappen [AC]. Om du gjort rätt syns ett litet D i överkanten på skärmen vilket indikerar att räknaren är inställd på Degree
5. Testa nu att slå $\tan(45)$ [EXE] och kontrollera att svaret exakt blir 1.

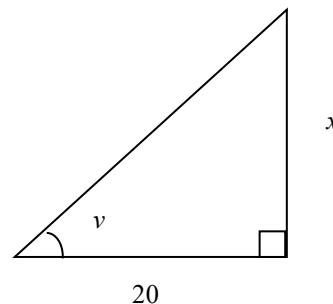


EXEMPEL 2.7

När man står 20 meter från ett träd så uppmäts vinkeln v i figuren nedan till 51° . Vilken höjd har trädet?

* * *

I figuren till höger är x *motstående* katet till vinkeln v medan sidan som är 20 meter lång är *närliggande* katet (vinkeln som med en annan sida i triangeln spänner upp vinkeln v).



Med hjälp av formeln ovan får vi ekvationen:

$$\text{TAN}(51^\circ) = \frac{x}{20}$$

För att få x fritt på höger sida måste vi multiplicera upp 20. Vi får:

$$20 \cdot \text{TAN}(51) = x$$

Vi slår detta på räknaren: $20 \times \tan(51)$ [EXE] vilket ger $24,6979... \approx 24,7$.

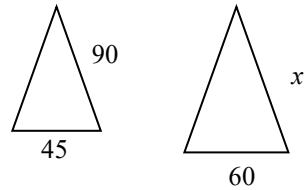
Svar: Trädet är 24,7 m högt.



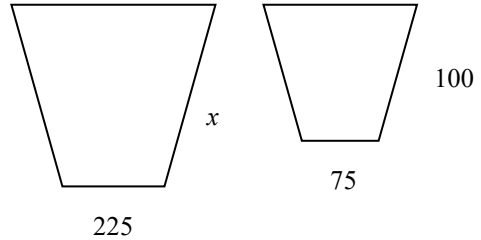
ÖVNINGAR

232. Nedanstående figurer visar likformiga avbildningar. Bestäm längden på sidan markerad med x .

a)



b)



233. Bestäm med hjälp av miniräknaren.

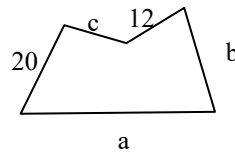
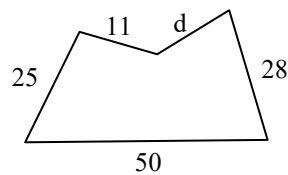
a) $\text{TAN}(12^\circ)$

b) $200 \cdot \text{TAN}(52^\circ)$

c) $10 \cdot \text{TAN}(38^\circ)$

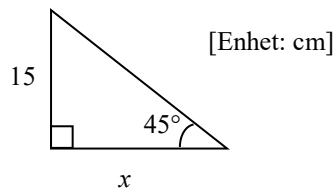
d) $57 \cdot \text{TAN}(45^\circ) / 3$

234. Figuren nedan visar två likformiga femhörningar. Hur långa är sidorna a, b, c och d? Avrunda svaren till heltal.

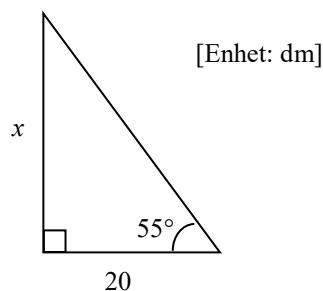


Ställ först upp en ekvation med x för följande trianglar. Bestäm sedan längden på sidan markerad med x med hjälp av räknaren. Bestäm därefter också **triangelns area**.

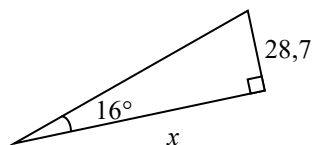
235.



236.

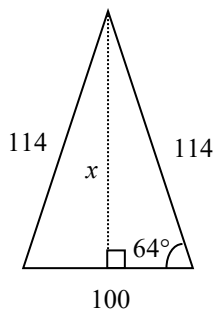


237.



[Enhet: cm]

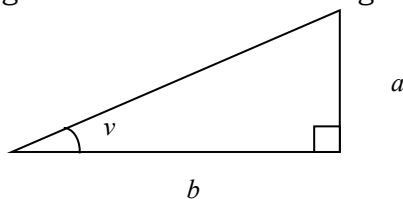
238.



[Enhet: m]

2.7 Bestämning av vinkel med tangens

På motsvarande vis som man kan beräkna en okänd sida i triangeln när vinkeln är känd så kan man beräkna vinkeln när sidorna är kända. Observera dock att triangeln måste vara rätvinklig för att det ska fungera.



Är den inte det får vi försöka använda tekniken som tillämpades i uppgift 238 ovan där den ursprungliga triangeln inte var rätvinklig men kunde delas upp i två rätvinkliga genom att höjden i den ursprungliga triangeln drogs.

$$\text{TAN}(v) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Motstående katet}}{\text{Närliggande katet}}$$

Figur 2.4 Definitionen av tangens för en vinkel i en rätvinklig triangel.

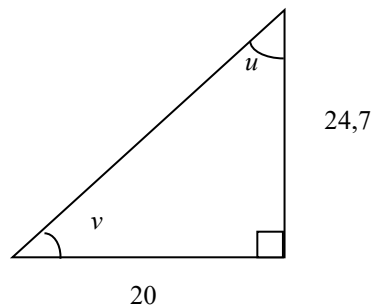
EXEMPEL 2.8

Hur stora är vinklarna v och u i nedanstående figur?

* * *

Med hjälp av formeln i Figur 2.4 ovan får vi ekvationen (varför?):

$$\text{TAN}(v) = \frac{24,7}{20}$$



TAN för något okänt ska alltså bli $24,7 / 20 = 1,235$

Vi måste nu få räknaren att räkna "baklänges" och få den att ta fram vinkeln som ger att tangens för den blir 1,235. Det går alltså *inte* att slå tan för 1,235. För att räkna baklänges trycker man först på [SHIFT] och sedan på knappen [tan]. Detta ger $\{\tan^{-1}\}$.

$$\tan^{-1}(1,235) = 51,0023... \approx 51^\circ.$$

Eftersom summan av vinklarna i en triangel alltid är 180° så får vi vinkeln $u = 180^\circ - 90^\circ - 51^\circ = 39^\circ$.

Svar: Vinkeln $v \approx 51^\circ$ och vinkeln $u \approx 39^\circ$.



I exemplet ovan använder vi den inversa funktionen till tangens för att få fram vinkeln: TAN^{-1} . Blanda inte ihop denna med TAN. TAN^{-1} är "baklängesfunktionen" till TAN. TAN använder vi när vi känner vinkeln och vill ha ut *sidan*, medan TAN^{-1} används när vi känner sidorna och vill ha ut *vinkeln*.

EXEMPEL 2.9

Bestäm vinklarna v och u i nedanstående figur.

* * *

Med hjälp av tangens kan vi beräkna vinkeln v .

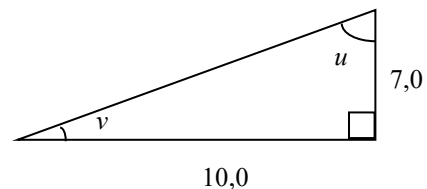
$$\text{TAN}(v) = \frac{7,0}{10,0}$$

$$\text{TAN}(v) = 0,70$$

$$v = \text{TAN}^{-1}(0,70)$$

$$v \approx 35^\circ$$

När vi ska ha ut *vinkeln* använder vi "baklängesfunktionen" $\{\tan^{-1}\}$ för att få fram den till 35° .



Eftersom summan av vinklarna i en triangel alltid är 180° så får vi vinkeln $u = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ \approx 55^\circ$.

Svar: Vinkeln $v = 35^\circ$ och vinkeln $u = 55^\circ$.

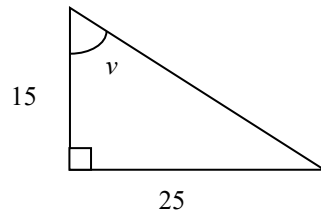


ÖVNINGAR

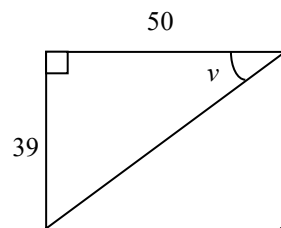


Ställ upp en ekvation och uppskatta därefter med hjälp av räknaren storleken på vinkeln v i följande figurer.

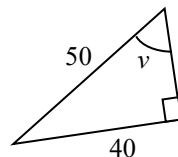
239.



240.

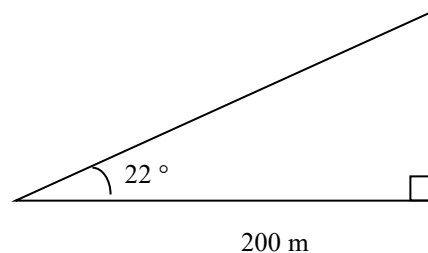


241.

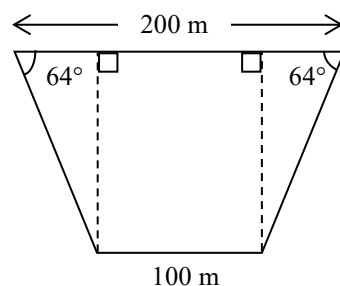


Bestäm arean i hektar med två decimaler för följande figurer.

242.

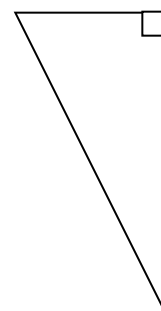


243.



244. Nedanstående bild är en skiss på ett skogsskifte format som en rätvinklig triangel. Bilden är i skalan 1:20 000.

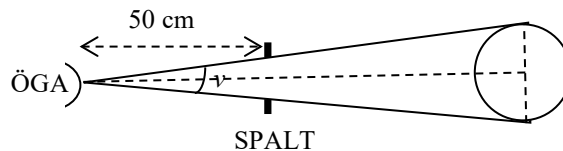
- a) Använd linjal för att bestämma skiftets areal i hektar. Beräkna sedan hur många ekplantor som ska beställas om området ska planteras med 1 000 ekplantor per hektar? (Vid planteringen blandas sedan ekplantorna med rader av gran.)



b) Bestäm m.h.a. räknaren vinkeln i den nedre spetsen på triangeln.

245. Ett relaskop har en spaltöppning på 10 mm och en kedjelängd som gör att spalten vid användning hamnar 50 cm från ögat.

Uppskatta med hjälp av räknaren hur stor vinkeln ν är (figuren nedan är *inte* skalenlig).



2.8 Lutningsprocent

I vissa tekniska tillämpningar i skogsbruket brukar man använda begreppet *lutningsprocent* som mått på en vinkel. Det kan t.ex. handla om en maskin ska orka upp för en backe (se Figur 2.5).



$$\text{Lutningsprocenten} = \frac{\text{Motstående katet}}{\text{Närliggande katet}} = \frac{a}{b}$$

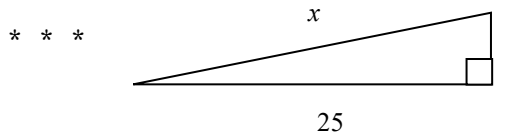
Figur 2.5. Definitionen av lutningsprocent för en backe.

Observera att detta innebär att lutningsprocenten är detsamma som tangens för backens vinkel. I praktiken kan det ofta vara svårt att mäta sträckan b i figuren. Istället kan man då mäta sträckan c . Sträckorna b och c kommer nämligen att vara ungefär lika långa om vinkeln är liten, vilket den oftast är i praktiken.

Notera också att i en triangel där a och b är lika stora så kommer lutningsprocenten att bli 100 procent.

EXEMPEL 2.10

Bestäm lutningsprocenten och sträckan x i nedanstående figur.



$$\text{Lutningen} = 1 / 25 = 0,04 = 4 \%$$

Med hjälp av Pythagoras sats får vi den okända sidan x :

$$25^2 + 1^2 = x^2$$

$$x^2 = 25^2 + 1^2$$

$$x = \sqrt{25^2 + 1^2}$$

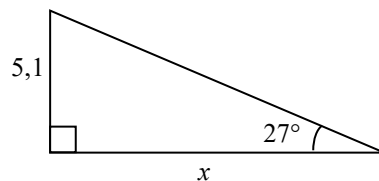
$$x \approx 25,02$$

Här blir alltså hypotenusan nästan precis lika lång som den långa kate-
ten. Vi hade alltså fått svaret 4 procent på lutningen även om vi använt
hypotenusan istället för kateten.



ÖVNINGAR

- 246.** Bestäm lutningsprocenten och sidan x i följande skiss (figuren är inte skalenlig).



- 247.** Ett tåg kör uppför en 1 km lång backe. Lutningsprocenten är 8 %.
- a) Uppskatta hur många meter högre upp tåget befinner sig vid backens slut.
 - b) Uppskatta med hjälp av räknaren hur många grader backens lutningsvinkel är. Svara avrundat till en decimal.
-